
Simulation von Mehrphasenströmungen mit einer Multi-Fluid-Methode

Vom Fachbereich Maschinenbau
an der Technischen Universität Darmstadt
zur
Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte

D i s s e r t a t i o n

von

Dipl.-Ing. Du-Fhan Choi

aus Frankfurt am Main

Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. J. Janicka
Mitberichterstatter:	Prof. Dr. rer. nat. J. Lang
Tag der Einreichung:	25. Januar 2010
Tag der mündlichen Prüfung:	20. April 2010

D 17
Darmstadt 2010



Erklärung zur Dissertation

Hiermit versichere ich die vorliegende Dissertation ohne Hilfe Dritter nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Du-Fhan Choi

Frankfurt, Januar 2010



Danksagung

Die vorliegende Dissertation entstand im Rahmen meiner dreijährigen Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Energie- und Kraftwerkstechnik der Technischen Universität Darmstadt und im Rahmen des Graduiertenkollegs 1344.

Mein Dank gilt zuerst Herrn Prof. Dr.-Ing. Johannes Janicka, dem Leiter des Fachgebiets Energie- und Kraftwerkstechnik. Er gab mir die Gelegenheit zur Promotion und unterstützte mich stets in Gesprächen mit Ratschlägen, aus denen ich immer wieder neue Motivation schöpfen konnte. Hervorheben möchte ich seine freundliche und menschliche Art, die mir zugestandenen Freiheiten und das entgegengebrachte Vertrauen. Weiterhin danke ich Herrn Prof. Dr. Jens Lang für die Übernahme des Korreferats.

Zudem möchte ich Elisabeth Zweyrohn, Jasmin Krenzer und meinen Arbeitskollegen für die Unterstützung, das angenehme Arbeitsklima, die hilfreichen Diskussionen und die Ratschläge bedanken.

Besonders danken möchte ich meinen Kollegen und Freunden Simone Eisenhuth, Thomas Kania, Verena Klapdor, Lukas Schneider und Nikolaos Spyrou für die Unterstützung, die Anregungen und die vielen Ratschläge, die maßgeblich zu dieser Arbeit beigetragen haben. Sie schufen nicht nur eine sehr angenehme Arbeitszeit, sondern auch außerhalb dieser viele unvergessliche und lustige Stunden.

Ebenfalls möchte ich Stefan Bareiss, Desislava Dimitrova, Cem Ertem und Anna Schwarz für die angenehme Zeit danken. In ihnen sehe ich nach der gemeinsamen Zeit mehr Freunde als Kollegen. Weiterer Dank geht an meine Freunde Andrei Koschmieder, Stavros Pylouras und Christoph Starke.

Besonderer Dank geht an meine Freundin und vor allem möchte ich mich von ganzem Herzen bei meinen Eltern und meiner Schwester für die unendliche Unterstützung und Geduld bedanken.

Frankfurt, Januar 2010

Du-Fhan Choi

Für die Freude
Für das Glück
Für die Liebe
Für das Leben

Für meine Freunde
Für meine Familie
Für meine Eltern
Für meine Schwester
Für meine Liebe

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
1.1. Motivation	1
1.2. Stand der Forschung	2
1.3. Gegenstand der Arbeit	6
1.4. Gliederung der Arbeit	7
2. Die Multi-Fluid-Methode	9
2.1. Grundlegende Gleichungen	9
2.2. Größen zur Beschreibung der dispersen Phase	10
2.2.1. Volumen- und Massengrößen	10
2.2.2. Partikelbezogene Größen	12
2.3. Die Multi-Fluid-Gleichungen	13
2.3.1. Konditionierte Ensemble-Mittelung	13
2.3.2. Konditioniert gemittelte Gleichungen	14
2.3.3. Der Impulsaustausch	15
2.4. Die Turbulenzmodellierung	19
2.4.1. Die kontinuierliche Phase	19
2.4.2. Die disperse Phase	21
2.5. Zusammenfassung	24
3. Direct Quadrature Method of Moments (DQMOM)	29
3.1. Grundlagen zur Verteilungsfunktion von Tropfen oder Partikeln	29
3.1.1. Diskrete Verteilungen	29
3.1.2. Kontinuierliche Verteilungsfunktionen	31
3.1.3. Approximation der Verteilungsfunktion	33
3.2. Die DQMOM-Transportgleichungen	35
3.3. Die Verdampfung	38
3.3.1. Verdampfung mit der DQMOM	38
3.3.2. Erweiterung der DQMOM nach Fox	40
3.3.3. Verdampfungsmodellierung	45
3.4. Die Kopplung der DQMOM mit der Multi-Fluid-Methode	48
3.5. Zusammenfassung	50

4. Die Numerik	53
4.1. Finite-Volumen-Methoden	53
4.1.1. Diskretisierung konvektiver Flüsse	54
4.1.2. Diskretisierung diffusiver Flüsse	57
4.1.3. Diskretisierung der zeitlichen Ableitung	57
4.1.4. Druckkorrektur	58
4.1.5. Unregelmäßige numerische Gitter	59
4.2. Implementierung	61
4.2.1. Multi-Fluid-Methode	61
4.2.2. DQMOM	63
4.2.3. Berechnungsalgorithmus	64
5. Verifizierung	67
5.1. Multi-Fluid-Methode	67
5.1.1. Freier Fall der dispersen Phase	67
5.1.2. Einfluss des aerodynamischen Widerstands auf Tropfen	69
5.1.3. Richtungsunabhängigkeit	71
5.2. DQMOM	72
5.2.1. Das D^2 -Gesetz	73
5.2.2. Vergleich mit Euler-Lagrange	74
5.3. Gitterstudie	88
6. Anwendung der Methoden und Modelle	91
6.1. Turbulente Kanalströmung	91
6.1.1. Beschreibung des Experiments und der Simulation	91
6.1.2. Ergebnisse	93
6.2. Turbulente Stufenströmung	97
6.2.1. Beschreibung des Experiments und der Simulation	97
6.2.2. Ergebnisse	98
6.3. Verdrallte Strömung	106
6.3.1. Beschreibung des Experiments und der Simulation	106
6.3.2. Ergebnisse	109
6.4. Verdampfende Tropfen	114
6.4.1. Beschreibung des Experiments und der Simulation	114
6.4.2. Ergebnisse	116
7. Zusammenfassung und Ausblick	119
A. Der PD-Algorithmus	123



Nomenklatur

Lateinische Großbuchstaben

A	Fläche	m^2
C_1, C_2	Modellparameter	—
C_d	Widerstandskoeffizient	—
C_t	Responsekoeffizient	—
C_μ	Modellkonstante	—
D	Durchmesser	m
D, D_{12}	Diffusionskoeffizient	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
E_v	Verdampfungskonstante	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
F	Kraft, Kraftvektor	N
H	Höhe	m
K	Massentransfer	s^{-1}
\dot{M}	Massenstrom	kg s^{-1}
M	Impulstransfer	$\text{kg s}^{-2} \text{m}^{-2}$
N	Anzahl	—
R_{ij}	Spannungstensor	$\text{kg s}^{-2} \text{m}^{-1}$
R_v	Verdampfungsgesetz	variabel
S	Oberfläche	m^2
S	Drallzahl	—
S_{dk}	Quellterm turbulente kinetische Energie	$\text{kg s}^{-3} \text{m}^{-1}$
$S_{d\varepsilon}$	Quellterm Dissipation der turb. kin. Energie	$\text{kg s}^{-3} \text{m}^{-1}$
S_n	Momentenquellterm	variabel
U	Geschwindigkeit	m s^{-1}
V	Volumen	m^3
\dot{V}	Volumenstrom	$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$
X	Phasenindikator	—
Y	Massenbruch	—
Z	globale Massenbeladung	—

Lateinische Kleinbuchstaben

a	DQMOM-Quellterm	variabel
b	DQMOM-Quellterm	variabel
c	DQMOM-Quellterm	variabel
c_p	spez. Wärmekapazität	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
d	Durchmesser	m
d_{32}	Sauterdurchmesser	m
d_m	mittlerer Durchmesser	m
g	Gravitation, Gravitationsvektor	m s^{-2}
h	Höhe	m
Δh_v	spez. Verdampfungsenthalpie	J kg^{-1}
k	turbulente kinetische Energie	$\text{m}^2 \text{s}^{-2}$
m	Moment	variabel
\dot{m}	Massenstrom	kg s^{-1}
\dot{m}''	Massentransferrate	$\text{kg s}^{-1} \text{m}^{-2}$
n	relative Häufigkeit	—
p	Druck	N m^{-2}
q	Quelle	variabel
r	Radius, Ortsvektor	m
s	Strecke	m
t	Zeit	s
u	Geschwindigkeit, Geschwindigkeitsvektor	m s^{-1}
v	Tropfenvolumen	m^3
w	Wichtung	—
x	Ort, Ortsvektor	m
z	lokale Massenbeladung	—

Griechische Großbuchstaben

Δ	Differenz	—
Ψ	Tropfenverlust	—

Griechische Kleinbuchstaben

α	Volumenanteil	—
β	Interpolationsfaktor	—

γ	Blendingfaktor	—
δ	Differenz	—
δ	Dirac-Funktion	—
δ_{ij}	Kronecker-Symbol	—
ε	Dissipation	$\text{m}^2 \text{s}^{-3}$
ϕ	Skalar	variabel
λ	Wärmeleitfähigkeit	$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$
μ	dynamische Viskosität	$\text{kg s}^{-1} \text{m}^{-1}$
μ	Erwartungswert	m
ν	kinematische Viskosität	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
ρ	Dichte	kg m^{-3}
σ	Standardabweichung	m
$\sigma_k, \sigma_\varepsilon$	Modellparameter	—
ς	gewichteter Durchmesser	m
τ	Zeitmaß	s
τ_{ij}	Spannungstensor	$\text{kg s}^{-2} \text{m}^{-1}$

Indizes

<i>c</i>	kontinuierliche Phase
<i>d</i>	disperse Phase
<i>drag</i>	Widerstand
<i>expl.</i>	explizit
<i>H</i>	höhere Ordnung
<i>impl.</i>	implizit
<i>korr.</i>	korrigiert
<i>lift</i>	Auftrieb
<i>MF</i>	Multi-Fluid
<i>p</i>	Partikel, Tropfen
<i>pressure</i>	Druck
<i>q</i>	Phase q
<i>ref</i>	Referenz
<i>rel</i>	relativ
<i>s</i>	an der Fläche s
<i>vm</i>	virtuelle Masse
α	Knoten

∞ weit entfernt

Dimensionslose Kennzahlen

B_T	Wärmetransferkoeffizient
B_Y	Massentransferkoeffizient
Le	Lewiszahl
Re	Reynoldszahl
St	Stokeszahl

Abkürzungen

CD	Central Differencing
CFD	Computational Fluid Dynamics
DNS	Direct Numerical Simulation
DQMOM	Direct Quadrature Method of Moments
FVM	Finite Volumen Methode
KV	Kontrollvolumina
LDA	Laser Doppler Anemometrie
LPP	Lean Premixed Prevaporized
MOM	Method of Moments
PD	Product Difference
PDA	Phasen Doppler Anemometrie
PDPA	Phase Doppler Particle Analyzer
PTC	Particle Trajectory Crossing
QMOM	Quadrature Method of Moments
RQL	Rich Burn Quick Quench Lean Burn
SMD	Sauter Mean Diameter
TKE	turbulente kinetische Energie
UD	Upwind Differencing
V	Verdampfung
VoF	Volume-of-Fluid
WK	Widerstandskraft

1 Einleitung

1.1 Motivation

Mehrphasenströmungen sind dadurch gekennzeichnet, dass zwei oder mehr Phasen gleichzeitig existieren und miteinander interagieren. Gängige Beispiele aus der natürlichen Umgebung sind Flüsse, in denen kleine Partikel im Wasser treiben oder Regentropfen, die durch Wind ihre Flug- bzw. Fallrichtung ändern. In technischen Umgebungen treten Mehrphasenströmungen beispielsweise beim Lackieren, Sandstrahlen oder bei Verbrennungsprozessen auf, in denen z. B. flüssiger Brennstoff zunächst in Tropfen zerstäubt, anschließend verdampft und als Luft-Brennstoff-Gemisch verbrannt wird.

Verbrennungsprozesse, wie sie bei der Energiegewinnung aus fossilen Energieträgern (Kohle, Öl und Gas) stattfinden, spielen in der heutigen Zeit eine wichtige Rolle. Ihr Anteil bei der Deckung des weltweiten Primärenergiebedarfs liegt derzeit bei über 80 % [1]. Andere nennenswerte Energieträger sind die Kernenergie und regenerative Energieträger (Wasser, Wind und Sonne). Die Nutzung von regenerativen Energien bleibt durch unterschiedliche Aspekte, beispielsweise Kosten, Mobilität, Versorgungssicherheit, Speichermöglichkeit und Sicherheit teilweise begrenzt. Daher wird die Energiegewinnung aus fossilen Energieträgern weiterhin einen großen Anteil haben, bei der als Nebenprodukte Schadstoffe wie Kohlenmonoxid (CO), Kohlendioxid (CO_2), Stickstoffoxide (NO_x), Schwefeldioxid (SO_2) und unverbrannte Kohlenwasserstoffe (UHC) entstehen. Die zunehmende Weltbevölkerung und die Industrialisierung von Schwellenländern führen zu einem weiter steigenden Energiebedarf und im Zuge dessen werden der Verbrauch an fossilen Energieträgern und der Ausstoß an Schadstoffen ebenfalls steigen. Die Konsequenzen des steigenden Energiebedarfs sind sinkende Vorräte an fossilen Energieträgern und die Veränderung des weltweiten Klimas durch die steigenden Schadstoffemissionen, die den Treibhauseffekt weiter verstärken [36, 80]. Die sich aus diesem Umstand ergebenden Herausforderungen sind die effizientere Nutzung der fossilen Energieträger und die Förderung der regenerativen Energiegewinnung.

Zur effizienteren Nutzung von fossilen Energieträgern werden heutzutage die Verbrennungsprozesse kontinuierlich optimiert. Am Beispiel der Flugzeugtriebwerke ist dies an den Neuerungen der Brennkammertechnologien wie RQL (Rich Burn Quick Quench Lean Burn) oder LPP (Lean Premixed Prevaporized) zu sehen [26, 49]. Flugzeug-

triebwerke spielen bei der Emission eine besondere Rolle, da ihre Schadstoffe bei Höhen ausgestoßen werden, die sensibel auf menschlichen Einfluss reagieren [48]. Die neuen Brennkammertechnologien ermöglichen die weitere Reduzierung von Kraftstoffverbrauch und Schadstoffemissionen. Diese neuen Konzepte führen jedoch zu unerwünschten Phänomenen, wie Verbrennungsinstabilitäten [62], die noch weiter erforscht werden müssen.

Für die Entwicklung und Optimierung von Verbrennungsprozessen werden zusätzlich zu den experimentellen Untersuchungen in Hinblick auf Kosten und Zeit zunehmend Computersimulationen verwendet. Auch die Ausweitung der Forschung und Entwicklung auf den gesamten Verbrennungsprozess (z. B. Spraygenerierung, Verdampfung) gewinnt zunehmend an Interesse, da beispielsweise Spraygenerierung oder Verdampfung diesen stark beeinflussen können. Die Methoden, die in den Computersimulationen genutzt werden, basieren auf mathematischen, physikalischen und numerischen Modellen. Herausforderungen hierbei sind die Stabilität und die Genauigkeit [32]. Auch die Rechengeschwindigkeit darf bei der Anwendung und Entwicklung von Methoden und Modellen nicht vernachlässigt werden, da vor allem in der Industrie auf diesen Faktor viel Wert gelegt wird. Trotz stetiger Weiterentwicklung der Rechnersysteme und Modelle, sind viele Modelle u. a. auch auf dem Gebiet der Mehrphasenströmungen noch nicht ausgereift oder zu rechenintensiv [16, 40].

Die vorliegende Arbeit soll dazu beitragen die Entwicklung des Verbrennungsprozesses zu erweitern. Ein erster Schritt ist die Simulation von mehrphasigen Prozessen, die vor dem Verbrennungsprozess stattfinden. Hierzu wird in dieser Arbeit eine Methode zur Beschreibung von technischen Sprays untersucht, die Gegenstand aktueller Forschung ist. Im folgenden Abschnitt wird der Stand der Forschung erläutert, um die Einordnung dieser Methode in den wissenschaftlichen Kontext zu erleichtern.

1.2 Stand der Forschung

Die numerische Strömungssimulation, auch als CFD (Computational Fluid Dynamics) bezeichnet, löst Gleichungen, welche die fluiddynamischen Eigenschaften der Strömungen beschreiben. Vor dem Lösen der Gleichungen, werden im Pre-Processing die Eigenschaften der Fluide, die Randbedingungen und das Problemgebiet in Form eines numerischen Gitters festgelegt und anschließend werden die Gleichungen mit einer numerischen Lösungsprozedur ausgewertet. Beim Post-Processing wird das Ergebnis aufbereitet, um die Bewertung der Ergebnisse zu ermöglichen. Für die numerische Beschreibung von Mehrphasenströmungen existiert eine Vielfalt an Methoden. Die Diversität kann mitunter dadurch begründet werden, dass im Bereich der Mehrpha-

senströmungen ebenfalls zahlreiche unterschiedliche Strömungen existieren, in denen mehrere Phasen involviert sind. Die Vielfalt spiegelt sich auch in den Möglichkeiten zur Charakterisierung¹ von Mehrphasenströmungen wider. Beispielsweise können Mehrphasenströmungen anhand der Aggregatzustände oder der Anteile der jeweiligen Phasen charakterisiert werden. Dieser Umstand führt dazu, dass eine numerische Simulation nur unter Annahmen und Einschränkungen möglich ist. Einen Überblick zu den Methoden zur Beschreibung von Mehrphasenströmungen kann z.B. in [6] gefunden werden. Mehrphasenströmungen, die in dieser Arbeit behandelt werden, zählen zu polydispersen Mehrphasenströmungen. Diese sind dadurch gekennzeichnet, dass die disperse Phase aus Partikeln oder Tropfen besteht, deren Größe variiert. Darunter fallen auch technische Sprays, bei denen flüssiger Kraftstoff zerstäubt und verdampft wird. Im Folgenden werden hier kurz die wichtigsten Methoden zur numerischen Abbildung solcher Strömungen beschrieben.

- Phasengrenzenverfolgung
- Euler-Lagrange
- Euler-Euler

Beschreibung und Anwendung der Methoden

Eine Möglichkeit zur Beschreibung von technischen Sprays stellen die Methoden dar, bei denen die Phasengrenze verfolgt wird, die häufig in Kombination mit der direkten numerischen Simulation (DNS) verwendet werden. Die hohe räumliche Auflösung wird benötigt, da sich an der Phasengrenze die Eigenschaften der Fluide sprunghaft ändern und sie dient der Verfolgung der Phasengrenze. Dadurch können alle relevanten Skalen berücksichtigt werden und ermöglichen es die Dynamik der Phasengrenze sowie den Austausch an Masse und Wärme zwischen den Phasen sehr genau zu bestimmen. Häufig verwendete Verfahren sind zum Beispiel die Volume-of-Fluid-Methode (VoF), die Level-Set-Methode oder auch Kombinationen, um die Vorteile jeweiliger Methoden (z.B. Konservativität, Darstellbarkeit der Phasengrenze) zu nutzen. Für eine Simulation von technischen Sprays sind die Methoden der Phasengrenzverfolgung aufgrund der hohen Auflösung derzeit noch zu rechenintensiv, eignen sich aber aufgrund der geringen Modellannahmen zur Modellentwicklung und Verifizierung. Die Phasengrenzverfolgung findet zum Beispiel Anwendung zur Simulation des primären Strahlzerfalls [42]. In [61] werden die VoF und die Level-Set-Methode kombiniert. Weitere Anwendung finden diese Methoden bei der Simulation von hydrodynamischen Problemen [41] oder auch bei siedenden Strömungen [84].

¹ Eine Einteilung ist z.B. in [37] aufgeführt

Bei der Euler-Lagrange-Methode wird die kontinuierliche Phase im Euler-Kontext und die disperse Phase im Lagrange-Kontext beschrieben. Einzelne disperse Elemente (Partikel, Tropfen, Blasen) werden im Strömungsgebiet verfolgt. Dadurch ist diese Methode prinzipiell auf die Beschreibung von dispersen Mehrphasenströmungen eingeschränkt. Für die dispersen Elemente wird die Trajektorie über eine Partikelbewegungsgleichung [13, 29] bestimmt, welche die Kräfte, die auf ein Partikel wirken, bilanziert und die Änderung der Partikelbewegung beschreibt. Die Kräfte, die auf ein Partikel wirken, werden mitunter durch die kontinuierliche Phase verursacht und können über die Strömungsgrößen und Eigenschaften eines Partikels (Größe, Dichte, Geschwindigkeit etc.) bestimmt werden. Zur Bestimmung des Einflusses der dispersen Phase auf die kontinuierliche Phase müssen die Größen der dispersen Phase im Euler-Kontext vorliegen. Diese werden bestimmt, indem über die dispersen Elemente gemittelt wird und die mittleren Größen der dispersen Phase am Ort x und zum Zeitpunkt t bestimmt werden. Um eine hohe Genauigkeit und minimales statistisches Rauschen für diese Größen zu gewährleisten, muss für die Mittelung eine hinreichend große Anzahl an dispersen Elementen verwendet werden. Für den Rechenaufwand ergibt sich durch die Berechnung der Trajektorie jedes dispersen Elementes ein proportionaler Zusammenhang mit der Anzahl der dispersen Elemente. Daher steigt der Rechenaufwand mit der Beladung einer Mehrphasenströmung. Dem hohen Rechenaufwand kann entgegengewirkt werden, indem einzelne disperse Elemente in Gruppen, auch *Parcels* genannt, zusammengefasst werden. Zusätzlich kann der Rechenaufwand der Euler-Lagrange-Methode steigen, wenn z. B. eine stark instationäre Strömung vorliegt und die dispersen Elemente sich ungleichmäßig verteilen. Ergeben sich Strömungsgebiete, in denen nur sehr wenige disperse Elemente anzutreffen sind, reicht die Anzahl nicht für eine Mittelung. Dieser Effekt kann bei verdampfenden Strömungen verstärkt werden, da durch Verdampfung disperse Elemente verschwinden. Um statistisches Rauschen zu vermeiden, wird die Rechendauer der Simulation erhöht. Anwendung findet diese Methode beispielsweise bei der Simulation von verdampfenden Sprays [12, 29, 31], gerührten Suspensionen [15], Abscheidungsprozessen [3], Tropfen innerhalb von Verdichtern [58], Pulverlackierung [9] oder auch bei der Simulation von dichten Strömungen [4].

Bei der klassischen Euler-Euler-Methode werden beide Phasen, die kontinuierliche und die disperse, im Euler-Kontext als Kontinuum beschrieben, die sich gegenseitig durchdringen. Jede Phase wird über Bilanzgleichungen für Impuls, Masse und Energie beschrieben. Diese Methode wird auch Two-Fluid-Methode genannt. Wenn mehr als zwei Euler-Phasen verwendet werden, wird dies auch als Multi-Fluid-Methode bezeichnet [37]. Die Bilanzgleichungen dieser Methoden sind vergleichbar mit den Gleichungen, die für die einphasigen Systeme verwendet werden. Zusätzlich sind Terme, welche die Interaktion zwischen den Phasen in Form von Impuls-, Masse- und Wärmeaustausch

repräsentieren, vorhanden. Für die Information über die Partikeleigenschaften (Größe, Anzahl, etc.) werden zusätzliche Felder benötigt. Hierbei ist festzuhalten, dass durch die Lösung von Bilanzgleichungen im gesamten Rechengebiet die Rechenzeit unabhängig von der Beladung ist. Im Falle der Two-Fluid-Methode existiert nur eine zusätzliche disperse Phase. Demnach kann am Ort x zum Zeitpunkt t nur eine Tropfengröße (z.B. Durchmesser) existieren. Dadurch ist die Abbildung der Polydispersität nur eingeschränkt möglich. Beispielsweise kann eine Tropfengrößenverteilung über einen repräsentativen Wert (mittlere Tropfengröße, Sauterdurchmesser) wiedergegeben werden. Ein Ausweg, die Polydispersität genauer abzubilden, kann durch die Verwendung der Multi-Fluid-Methode erreicht werden. Die disperse Phase wird dabei durch N zusätzliche Euler-Phasen abgebildet, wobei einer Tropfengrößenklasse eine Euler-Phase zugeordnet wird. Die Durchdringung der Phasen ermöglicht demnach, dass am Ort x zum Zeitpunkt t , N unterschiedliche Durchmesser existieren. Die Rechenzeit steigt bei dieser Methode proportional zu den zusätzlichen Phasen, da für jede zusätzliche Phase ein Satz an Bilanzgleichungen gelöst werden muss. Anwendung findet diese Methode u. a. bei Murgängen [43], Luftblasen in flüssigen Medien [7, 72], Rührkesseln [33], Festbettreaktoren, [71] oder Verdunstung von Wassertropfen [30].

Riber [70] untersucht die Rechenzeit der Euler-Lagrange- und Euler-Euler-Methode. Im Falle von parallelen Rechnungen führt eine ungleichmäßige Verteilung von Partikeln auf die Prozessoren bei der Euler-Lagrange-Methode zu einer Erhöhung der Rechenzeit. Die Euler-Euler-Methode verwendet für beide Phasen Bilanzgleichungen vom gleichen Typ. Die Parallelisierungsstrategie der Gasphase kann dementsprechend auf die disperse Phase angewendet werden.

Momentenmethoden

Um ein technisches Spray zu beschreiben muss die Polydispersität berücksichtigt werden. Der Umstand, dass die Two-Fluid-Methode die Polydispersität nur eingeschränkt darstellen kann und die Abbildung der Polydispersität mit der Multi-Fluid-Methode wiederum zu rechenintensiv ist, macht eine Anwendung dieser Methoden zur Simulation von technischen Sprays aufgrund der Wirtschaftlichkeit noch nicht denkbar.

Einen anderen Weg die Vorteile der Parallelisierbarkeit der Euler-Beschreibung zu nutzen und die Polydispersität zu berücksichtigen, bilden die Momentenmethoden. Darin wird die Entwicklung der Tropfengrößenverteilung in Raum und Zeit beschrieben. Die Momentenmethoden nutzen die Möglichkeit, dass Verteilungen auch über ihre Momente charakterisiert sind. Anstatt die Tropfengrößenverteilung auch als Verteilungsfunktion beschreibbar aufzulösen und zu berechnen, werden die Momente der Verteilung

betrachtet. Ausgehend von der kinetischen Spray-Gleichung wurden die Momentenmethoden entwickelt. Die Method of Moments (MOM) war eine der ersten Methoden [60] und wurde im Gebiet der Chemie verwendet. McGraw erweitert diese Methode mit einer quadratischen Approximation zur Quadrature Method of Moments (QMOM) [59]. Dabei wird die Verteilungsfunktion über Abszissen und Wichtungen, auch Quadratur-Variablen genannt, approximiert dargestellt (siehe Kapitel 3.1.3). Über diese Abszissen und Wichtungen können die Momente der Verteilungsfunktion approximiert und transportiert werden. Marchisio wendet diese Methode an [55, 56, 57] und stellt in Anlehnung an QMOM die Direct Quadrature Method of Moments (DQMOM) vor [54]. Anstatt wie bei der QMOM die Momente zu transportieren und über einen Algorithmus die Momente in jedem Zeitschritt zu rekonstruieren, werden in der DQMOM direkt die Variablen der quadratischen Approximation transportiert. Anwendungsgebiete reichen von Simulationen von Rußbildung [91], Lösung der Fokker-Planck-Gleichung [5] und Wirbelschichten [18] bis zu polydispersen Sprays. Letztere werden von Madsen [52, 53] und Friedrich [24] simuliert. Fox [22] stellt für die DQMOM sogenannte *Ratio Constraints* vor, um vollständige Verdampfung darzustellen. In [22] werden mit der neuen Methode Verifizierungsrechnungen durchgeführt und mit Ergebnissen aus einer Euler-Lagrange-Rechnung verglichen. Aus den Arbeiten [16, 22, 47] wird deutlich, dass der Rechenaufwand bei der DQMOM geringer ist als bei der Euler-Lagrange-Methode. Eine kurze Übersicht zu den Momentenmethoden ist z. B. in [23] zu finden.

1.3 Gegenstand der Arbeit

In dieser Arbeit wird zur Simulation von verdampfenden Mehrphasenströmungen die DQMOM, vorgestellt von Marchisio et. al [54], verwendet. Der Schwerpunkt liegt bei der Untersuchung der prinzipiellen Darstellbarkeit von Verdampfung mit dieser Methode. Von Friedrich [24] und Madsen [51, 52, 53] wurde diese Methode bereits angewendet, um polydisperse Mehrphasenströmungen unter Berücksichtigung von Primärzerfall, Kollision und Koaleszenz zu simulieren. Die Ergebnisse sind vielversprechend und eine Untersuchung der Darstellbarkeit von Verdampfung mit der DQMOM ist notwendig im Hinblick auf die Simulation von technischen Sprays in Verbrennungssystemen. Damit die Polydispersität abgebildet werden kann, wird die Multi-Fluid-Methode in Anlehnung an Hill [33] implementiert. Bei der Verwendung dieser Methode muss immer bedacht werden, dass die disperse Phase unter der Kontinuumsannahme abgebildet wird, auch wenn diese aus mehreren sphärischen Partikeln oder Tropfen besteht. Für die Modellierung der Verdampfung im Kontext der DQMOM wird auf ein einfaches Modell in Anlehnung an Abramzon und Sirignano [2] zurückgegriffen. Um den Aspekt der Anwendbarkeit der Methode in industriellen Umgebungen zu berücksichtigen, wird die

Abbildbarkeit von komplexen Problemgebieten durch die Verwendung eines unstrukturierten, parallelen und inkompressiblen CFD-Codes (Precise-Unstructured) ermöglicht. Zusammengefasst ergeben sich folgende Aufgabenpunkte:

- Implementierung der ausgewählten Methoden in Precise-Unstructured. Im Einzelnen wird die Multi-Fluid-Methode nach Hill [33] und die DQMOM nach Marchisio [54] und Fox [22] implementiert. Anschließend werden die beiden Methoden gekoppelt.
- Verifizierung der implementierten Methoden. Zur Verifizierung der Multi-Fluid-Methode werden Ergebnisse aus analytisch lösbaren Testfällen bestimmt und mit den Ergebnissen aus den numerischen Simulationen verglichen. In verschiedenen Arbeiten (z.B. [14, 47, 70, 75, 77, 78]) zu Momentenmethoden werden Euler-Lagrange-Simulationen zur Verifizierung genutzt. Daher wird zur Verifizierung der gekoppelten Methode (Multi-Fluid mit DQMOM) ebenfalls auf Euler-Lagrange-Simulationen zurückgegriffen.
- Zur Validierung und zur Untersuchung der Anwendbarkeit der Methoden werden zunächst für die Multi-Fluid-Methode geeignete experimentelle Untersuchungen ausgewählt und simuliert. Für die Validierung der gekoppelten Methode (Multi-Fluid mit DQMOM) dient eine Konfiguration, bei der experimentell die Verdampfung von Tropfen untersucht wurde.

1.4 Gliederung der Arbeit

In Kapitel 2 werden die Grundlagen von einphasigen und mehrphasigen Strömungen beschrieben. Anschließend wird die verwendete Multi-Fluid-Methode basierend auf der Arbeit von Hill [33] vorgestellt. Hierzu werden die verwendeten Gleichungen der Multi-Fluid-Methode und die verwendeten Modelle beschrieben.

Kapitel 3 behandelt die DQMOM, die von Marchisio [54] entwickelt wurde. In diesem Kapitel werden die notwendigen Grundlagen für die DQMOM vorgestellt und die Herleitung der DQMOM-Gleichungen behandelt. Es wird die Darstellbarkeit von Verdampfung mit der DQMOM diskutiert und eine Erweiterung der DQMOM von Fox [22] zur Darstellung vollständiger Verdampfung beschrieben. Abschließend wird das verwendete Verdampfungsmodell und die Kopplung der DQMOM mit der Multi-Fluid-Methode beschrieben.

Kapitel 4 beschreibt die verwendeten Methoden und Diskretisierungsverfahren zur numerischen Berechnung im Kontext der Finiten-Volumen-Methode. Anschließend wer-

den die Implementierungen der wichtigsten Terme und Gleichungen der Multi-Fluid-Methode und der DQMOM erläutert.

Kapitel 5 zeigt im ersten Abschnitt die Ergebnisse aus der Verifizierung der Multi-Fluid-Methode. Im zweiten Abschnitt wird die DQMOM über einen Vergleich mit Euler-Lagrange-Ergebnissen verifiziert.

Kapitel 6 zeigt die Anwendung der implementierten Modelle und Methoden auf experimentell untersuchte Konfigurationen. Dazu werden die experimentellen Konfigurationen und die numerischen Abbildungen dieser Konfiguration kurz erläutert. Abschließend ist der Vergleich der Ergebnisse zu sehen.

Kapitel 7 fasst die Arbeit zusammen und gibt einen Ausblick.

2 Die Multi-Fluid-Methode

In diesem Kapitel wird die Multi-Fluid-Methode vorgestellt, die zur Beschreibung von Strömungssystemen in dieser Arbeit verwendet wird. Hinter der Multi-Fluid-Methode steckt die Kontinuumsannahme für alle betrachteten Phasen. In dieser Arbeit wird zusätzlich angenommen, dass die disperse Phase aus sphärischen Partikeln oder Tropfen besteht. Zunächst werden grundlegende Gleichungen zur Beschreibung von Strömungen vorgestellt, aus denen die Gleichungen der Multi-Fluid-Methode ableitbar sind. Anschließend werden die charakteristischen Größen zur Beschreibung von Mehrphasenströmungen behandelt. Im dritten Abschnitt werden die Bilanzgleichungen, die der Multi-Fluid-Methode zugrunde liegen, und die Modellierung der zusätzlichen Terme, die sich aus der Interaktion der kontinuierlichen und der dispersen Phase ergeben, erläutert. Der letzte Abschnitt behandelt die Gleichungen zur Berücksichtigung der Turbulenz.

2.1 Grundlegende Gleichungen

Einhäsige Gas- oder Flüssigkeitsströmungen, wie sie in technischen Anwendungen häufig vorkommen, können als Kontinuum betrachtet werden. Zur Beschreibung solcher Strömungen werden Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie verwendet [83]. In dieser Arbeit wird die Energiebilanz nicht betrachtet. Die Bilanzgleichung für die Masse, auch Kontinuitätsgleichung bezeichnet, lautet

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad (2.1)$$

und die Bilanzgleichung für den Impuls, auch Cauchy'sche Bewegungsgleichung genannt, lautet

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij}), \quad (2.2)$$

wobei t für die Zeit, ρ für die Dichte des betrachteten Fluids, x_i, x_j für die Vektorkomponenten des Ortsvektors, u_i, u_j für die Vektorkomponenten des Geschwindigkeitsvektors und g_i für die Vektorkomponenten des Gravitationsvektors stehen. Mit τ_{ij} werden die Materialeigenschaften in Form eines Spannungstensors dargestellt.

Newtonsches Materialgesetz

Die in dieser Arbeit betrachteten Fluide werden als newtonsche Fluide behandelt. Beispiele für newtonsche Fluide sind Wasser, Luft, Gase und einige Öle. Für newtonsche Fluide ist der Spannungstensor τ_{ij} über folgenden Ausdruck gegeben

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \mu \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}. \quad (2.3)$$

Hierbei steht p für den Druck, μ für die dynamische Viskosität und δ_{ij} für das Kronecker-Delta.

Navier-Stokes-Gleichung

Die Navier-Stokes-Gleichung ist ein Spezialfall der Cauchy'schen Bewegungsgleichung und beschreibt die Bewegung von newtonschen Fluiden. Man erhält die Navier-Stokes-Gleichung durch Einsetzen des Spannungstensors für newtonsche Fluide (2.3) in die Cauchy'sche Bewegungsgleichung (2.2)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \right) + \rho g_i. \quad (2.4)$$

2.2 Größen zur Beschreibung der dispersen Phase

In einer Mehrphasenströmung wird die Phase, die materiell verbunden ist, als kontinuierliche und die materiell nicht verbundene als disperse Phase bezeichnet. Dies trifft bei Gas-Partikeln, Flüssigkeits-Partikeln und Gas-Tropfen-Strömungen zu. Betrachtet man ein Spray, wie es in Gasturbinen vorkommt, ist zu beobachten, dass durch die Zerstäubung des Kraftstoffes, Tropfen unterschiedlicher Größen erzeugt werden. Es entsteht eine disperse Mehrphasenströmung. Um disperse Mehrphasenströmungen zu charakterisieren, werden Größen verwendet, die in diesem Abschnitt vorgestellt werden.

2.2.1 Volumen- und Massengrößen

Volumengrößen können zur Beurteilung der Dichtheit von Mehrphasenströmungen verwendet werden. Da oftmals aufgrund der Vielfalt in Mehrphasensystemen die Dichte der dispersen Phase sehr unterschiedlich sein kann – Festpartikel, Tropfen oder Luftblasen – ist es nötig zusätzlich Massengrößen zu betrachten.

Der Volumenanteil

Der Volumenanteil gibt an, welcher Anteil eines betrachteten Volumens δV durch die kontinuierliche Phase oder die disperse Phase ausgefüllt ist. Der Volumenanteil für die disperse Phase α_d ist wie folgt definiert (der Index c steht für die kontinuierliche und Index d für die disperse Phase)

$$\alpha_d = \frac{\delta V_d}{\delta V}. \quad (2.5)$$

δV_d ist das Volumen der dispersen Phase innerhalb des betrachteten Volumens δV . Für die kontinuierliche Phase ist der Volumenanteil analog definiert

$$\alpha_c = \frac{\delta V_c}{\delta V}. \quad (2.6)$$

Da im betrachteten Volumen δV die Anteile der kontinuierlichen und der dispersen Phase zusammen das Volumen ausfüllen, ergibt sich, dass die Summe der Volumenanteile $= 1$ ist

$$1 = \alpha_c + \alpha_d. \quad (2.7)$$

Die Massenbeladung

Als Massenbeladung wird das Verhältnis von Massenstrom der dispersen Phase und kontinuierlicher Phase bezeichnet

$$z = \frac{\dot{m}_d}{\dot{m}_c} = \frac{\rho_d u_d}{\rho_c u_c}, \quad (2.8)$$

wobei u_d die Geschwindigkeit der dispersen und u_c die Geschwindigkeit der kontinuierlichen Phase ist und ρ jeweils für die Dichte steht. Da z sich von Ort zu Ort ändern kann, wird z auch als lokale Massenbeladung bezeichnet. Die globale Massenbeladung ist definiert über

$$Z = \frac{\dot{M}_d}{\dot{M}_c}. \quad (2.9)$$

Am bereits oben erwähnten Beispiel des Sprays in einer Brennkammer gibt es Bereiche, in denen keine Kraftstofftropfen sind ($z = 0$). Die globale Massenbeladung betrachtet die komplette Brennkammer und setzt den kompletten Massenstrom der dispersen Phase ins Verhältnis zu dem Massenstrom der kontinuierlichen Phase. Dies ist insofern eine wichtige Größe, da mit ihr abgeschätzt werden kann, ob zu viel oder zu wenig Kraftstoff für die Luftmenge in der Brennkammer vorhanden ist.

2.2.2 Partikelbezogene Größen

Zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens der dispersen Phase können unter der Annahme sphärischer Partikel folgende Größen definiert werden.

Partikelrelaxationszeit

Ausgangspunkt zur Bestimmung der Partikelrelaxationszeit τ_p ist ein festgehaltenes sphärisches Partikel mit der Geschwindigkeit $u_p = 0$, welches sich in einem Gas mit der dynamischen Viskosität μ_c und der Geschwindigkeit u_c befindet. Wird nun dieses Partikel losgelassen, wirken zwei dominierende Kräfte. Die Trägheitskraft und die Widerstandskraft durch die Gasströmung. Die Partikelrelaxationszeit ist die Zeit, die dieses Partikel benötigt, um 63 % der Gasgeschwindigkeit u_c anzunehmen

$$\tau_p = \frac{\rho_p D_p^2}{18\mu_c}, \quad (2.10)$$

wobei ρ_p die Dichte des Partikels und D_p der Partikeldurchmesser ist.

Partikelreynoldszahl

Die Partikelreynoldszahl Re_p wird analog zur Reynoldszahl Re verwendet. Bezogen auf Partikel dient sie zur Charakterisierung der Umströmung eines Partikels. In Kapitel 2.3.2 wird die Partikelreynoldszahl verwendet, um den Strömungswiderstand zu bestimmen und ist wie folgt definiert

$$Re_p = \frac{\rho_c |\mathbf{u}_{rel}| D_p}{\mu_c}, \quad (2.11)$$

wobei \mathbf{u}_{rel} der Geschwindigkeitsdifferenzvektor von der Gasgeschwindigkeit \mathbf{u}_c und der Partikelgeschwindigkeit \mathbf{u}_p ist und nach folgender Beziehung definiert wird

$$\mathbf{u}_{rel} = \mathbf{u}_c - \mathbf{u}_p. \quad (2.12)$$

Stokeszahl

Die Stokeszahl ist eine dimensionslose Kennzahl und beschreibt das Folgevermögen eines Partikels. Die Stokeszahl kann über Kräfte oder charakteristische Zeiten definiert

werden. Mit der charakteristischen Zeit der Strömung τ_c und der Relaxationszeit des Partikels τ_p ergibt sich für die Stokeszahl

$$St = \frac{\tau_p}{\tau_c}. \quad (2.13)$$

Ist die Stokeszahl klein $St \ll 1$, nehmen die Partikel schnell die Gasgeschwindigkeit an. Bei großen Stokeszahlen $St > 1$ wird der Einfluss der Gasgeschwindigkeit auf die Partikelbewegung klein.

2.3 Die Multi-Fluid-Gleichungen

Zur Beschreibung von Mehrphasenströmungen müssen, wie auch bei einphasigen Strömungen, Bilanzgleichungen für Masse und Impuls verwendet werden. Unter der Annahme, dass sich die disperse Phase wie ein Kontinuum verhält, können auf Basis der grundlegenden Gleichungen aus Abschnitt 2.1 Bilanzgleichungen für Masse und Impuls auch für die Beschreibung der dispersen Phase von Mehrphasenströmungen abgeleitet werden.

In technischen Anwendungen treten hauptsächlich turbulente Strömungen auf. Oftmals interessieren aber nicht die Schwankungsgrößen, sondern die mittleren Größen der Strömung. Daher wurden Mittelungsverfahren entwickelt, mit denen gezielt die mittleren Größen bestimmt werden können. Im Bereich der Mehrphasenströmungen tritt dieser Umstand ebenfalls auf, daher wurden auch hier gemittelte Gleichungen entwickelt. Beispielsweise wurden von Gosman [28] und Groll [30] Bilanzgleichungen für die Two-Fluid-Methode vorgestellt. Die erhaltenen Bilanzgleichungen sind alle sehr ähnlich in ihrer Struktur, lediglich die zusätzlichen Terme unterscheiden sich durch die Anwendung unterschiedlicher Mittelungsverfahren. In dieser Arbeit werden die konditioniert ensemble gemittelten Gleichungen von Hill [33] verwendet. Diese waren auch Grundlage der Arbeiten von Weller [86] und Rusche [72].

2.3.1 Konditionierte Ensemble-Mittelung

In diesem Abschnitt soll kurz gezeigt werden, welchen Vorteil die konditionierte Ensemble-Mittelung bietet, die auf der Arbeit von Dopazo [17] basiert. Bei der konditionierten Ensemble-Mittelung wird der Volumenanteil α_q der Phase q mit Hilfe eines Phasenindikators X_q definiert. Der Phasenindikator hat die Eigenschaft

$$X_q(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{, wenn Phase } q \text{ existiert,} \\ 0 & \text{, wenn Phase } q \text{ nicht existiert.} \end{cases} \quad (2.14)$$

Der Volumenanteil α_q ist über die Ensemble-Mittelung definiert durch

$$\alpha_q = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_{q,k} = \frac{N_q}{N}, \quad (2.15)$$

wobei N die Anzahl des Ensembles ist und N_q die Anzahl, wie oft Partikel oder Tropfen der Phase q bei N Stichproben angetroffen wurden. Die Ensemble-Mittelung verlangt, dass $N \rightarrow \infty$. Somit kann der Volumenanteil α_q als Wahrscheinlichkeit für das Antreffen der Phase q am Ort x zum Zeitpunkt t betrachtet werden und unterliegt daher keinen Schwankungen. Das führt dazu, dass bei einer anschließenden Reynoldszerlegung keine Korrelationen mit dem Volumenanteil α auftreten. Verwendet man hingegen zeitgemittelte Größen, entstehen Korrelationen höherer Ordnung, die nur schwer zu interpretieren und zu modellieren sind. Die vollständige konditionierte Ensemble-Mittelung für die Kontinuitäts- und Impulsgleichung ist in [33] zu finden.

2.3.2 Konditioniert gemittelte Gleichungen

Die konditionierte Ensemble-Mittelung führt zu zusätzlichen Termen, die über bekannte Größen modelliert werden müssen. In der Kontinuitätsgleichung entsteht durch die konditionierte Mittelung ein zusätzlicher Term, der als Massentransfer zwischen den Phasen betrachtet werden kann (z. B. Verdampfung). In der Impulsgleichung entstehen durch die konditionierte Mittelung zusätzliche Terme, die als Impulstransfer zwischen den Phasen interpretiert werden können. Anschließend wird eine Reynoldszerlegung zur Berücksichtigung der Turbulenz durchgeführt.

Massenbilanz

Die konditioniert gemittelte Bilanzgleichung für die Masse ergibt sich zu

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_q \alpha_q) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho_q \alpha_q \bar{u}_{i,q}) = \rho_q \bar{K}_q, \quad (2.16)$$

wobei α für den Volumenteil der Phase q steht. Für $q = c$ ist die kontinuierliche und für $q = d$ die disperse Phase gemeint. Der Term $\rho_q \bar{K}_q$ steht für den Massenaustausch.

Impulsbilanz

Die konditioniert gemittelte Gleichung für die Impulsbilanz lautet für die kontinuierliche Phase

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_c \alpha_c \bar{u}_{i,c}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_c \alpha_c \bar{u}_{i,c} \bar{u}_{j,c}) = & -\alpha_c \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{p} + \rho_c \alpha_c g_i \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha_c \mu_c \left[\frac{\partial \bar{u}_{i,c}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_{j,c}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}_{k,c}}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{R}_{ij,c} + \bar{M}_{i,c} + \bar{u}_{i,c} \rho_c \bar{K}_c, \end{aligned} \quad (2.17)$$

und für die disperse Phase

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_d \alpha_d \bar{u}_{i,d}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_d \alpha_d \bar{u}_{i,d} \bar{u}_{j,d}) = & -\alpha_d \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{p} + \rho_d \alpha_d g_i \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha_d \mu_d \left[\frac{\partial \bar{u}_{i,d}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_{j,d}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}_{k,d}}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{R}_{ij,d} + \bar{M}_{i,d} + \bar{u}_{i,d} \rho_d \bar{K}_d. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Der Term $\bar{R}_{ij,q}$ entsteht durch die Reynoldszerlegung und steht für die turbulenten Größen. $\bar{M}_{i,q}$ steht für den Impulsaustausch zwischen den Phasen. Beide Terme müssen modelliert werden. In den folgenden Abschnitten wird die Modellierung dargestellt. Der Term $\bar{u}_{i,q} \rho_q \bar{K}_q$ berücksichtigt die Impulsänderung durch Massentransfer. Die Modellierung dieses Terms wird in Kapitel 3 erläutert.

2.3.3 Der Impulsaustausch

Der Term $\bar{M}_{i,q}$ steht für den kompletten Impulsaustausch zwischen der kontinuierlichen und der dispersen Phase. Das dritte Gesetz von Newton besagt, dass Kräfte immer paarweise auftreten (Actio = Reactio). Nach diesem Gesetz führt dies zu

$$\bar{M}_{i,c} = -\bar{M}_{i,d}. \quad (2.19)$$

Daher müssen nur die Kräfte, die auf eine Phase wirken, betrachtet werden. Da hier das Superpositionsprinzip gilt, kann der Term $\bar{M}_{i,d}$, der den gesamten Impulsaustausch

repräsentiert und sich aus mehreren Kräften zusammensetzt, in seine einzelnen Anteile $\overline{M}_{F_{i,d}}$ zerlegt werden

$$\overline{M}_{i,d} = \sum \overline{M}_{F_{i,d}}. \quad (2.20)$$

Aus der Literatur, z. B. [13], ergeben sich folgende Kräfte $F_i = \frac{M_{F_i}}{\delta V}$, die auf die disperse Phase wirken:

- Widerstandskraft F_{drag}
- Virtuelle Massenkraft F_{vm}
- Auftriebskraft F_{lift}
- Bassetkraft F_{basset}

Unter bestimmten Voraussetzungen können einige der oben aufgelisteten Kräfte vernachlässigt werden. Für die in dieser Arbeit betrachteten dispersen Mehrphasenströmungen gilt, dass das Dichteverhältnis $\frac{\rho_d}{\rho_c}$ groß ist. Unter diesen Voraussetzungen können die Kräfte virtuelle Massenkraft, Auftriebskraft und Bassetkraft vernachlässigt werden. Durch das verwendete Mittelungsverfahren entsteht ein Term, der nicht durch oben genannte Kräfte abgebildet wird. Dieser wird als zusätzliche Druckkraft $F_{pressure}$ behandelt, da er vom mittleren Druck abhängig ist.

Widerstandskraft

Neben der Gewichtskraft $F_g = m_p g$ ist die Widerstandskraft eine der wichtigsten Kräfte, die das dynamische Verhalten von Tropfen oder Partikeln beeinflussen. Ausgehend von der Widerstandskraft, die durch Reibung und Druck verursacht wird, berechnet sich die Widerstandskraft auf ein einzelnes Partikel über

$$F_{i,drag} = \frac{1}{2} \rho_c A_p C_d |\mathbf{u}_{rel}| u_{i,rel} \quad (2.21)$$

mit der projizierten Fläche A_p des Partikels, die senkrecht zur Anströmung steht, und dem dimensionslosen Widerstandskoeffizienten C_d . Da im Kontext der Multi-Fluid-Methode nicht ein Einzelpartikel betrachtet wird, sondern eine Wolke aus Partikeln in einem betrachteten Volumen, muss die Widerstandskraft in dem betrachteten Volumen bestimmt werden, die sich aus der mittleren Anzahl der Partikel in diesem Volumen ergibt. Der in Abschnitt 2.2.1 definierte Volumenanteil wird hierfür verwendet. Die Widerstandskraft in einem betrachteten Volumen wird somit bestimmt über

$$F_{i,drag} = \frac{3}{4} \frac{\alpha_d \rho_c C_d}{D_p} |\mathbf{u}_{rel}| u_{i,rel} \delta V. \quad (2.22)$$

Eine weitere wichtige Größe zur Bestimmung der Widerstandskraft ist der dimensionslose Widerstandskoeffizient C_d . Da der Widerstandskoeffizient von der Umströmung des betrachteten Partikels abhängig ist, wird zur Charakterisierung der Umströmung die bereits in Abschnitt 2.2.2 definierte Partikelreynoldszahl Re_p verwendet. Von Schiller und Naumann [74] wurde eine Korrektur vorgeschlagen, die in Abhängigkeit der Partikelreynoldszahl den Widerstandskoeffizienten bestimmt.

$$C_d = \begin{cases} \frac{24}{Re_p} \left(1 + 0.15 Re_p^{0.687} \right) & Re_p < 10^3 \\ 0.44 & Re_p \geq 10^3 \end{cases} \quad (2.23)$$

In dieser Arbeit wird dieses Modell für die Modellierung der Widerstandskraft verwendet.

Die zusätzliche Druckkraft

Der zu modellierende Term entsteht durch das verwendete Mittelungsverfahren. In diesem Term steht die Druckdifferenz zwischen dem mittleren Hauptdruck und dem mittleren lokalen Druck an der Phasengrenzfläche. Hill verwendet für die Modellierung dieses Terms folgenden Ausdruck

$$F_{i,presure} = -0.37 \rho_c C_d |\mathbf{u}_{rel}|^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_d) \delta V. \quad (2.24)$$

Da in diesem Modell der Gradient des Volumenanteils der dispersen Phase steckt, wirkt dieser Term dispersiv [33].

Virtuelle Massenkraft

Beschleunigt ein Partikel, welches umgeben ist von einem Fluid, muss zur Beschleunigung des Partikels ein Teil des umgebenden Fluids ebenfalls beschleunigt werden. Die Kraft, die benötigt wird, um das umgebende Fluid (zusätzliche Masse) zu beschleunigen, wird daher als virtuelle Massenkraft oder auch als zusätzliche Massenkraft bezeichnet. Ein Ausdruck für diese Kraft ist gegeben durch

$$F_{i,vm} = C_{vm} \alpha_d \rho_c \left(\frac{D_c}{Dt} u_{i,c} - \frac{D_d}{Dt} u_{i,d} \right) \delta V \quad (2.25)$$

mit C_{vm} als dimensionslosen Koeffizienten und der materiellen Ableitung $\frac{D_q}{Dt}$ der Phase q . Für C_{vm} wird in der Literatur ein Wert von 0.5 angegeben. Bei dispersen Mehrphasenströmungen, bei denen die Dichte ρ_d kleiner ist als die Dichte der kontinuierlichen Phase ρ_c , kann die zusätzliche Masse im Vergleich zur dispersen Masse groß werden. Besitzt die disperse Phase eine wesentlich höhere Dichte als die kontinuierliche Phase, ist die zusätzliche Masse vernachlässigbar.

Auftriebskraft

Die Auftriebskraft kann zusammen mit der Gewichtskraft formuliert werden. Die Auftriebskraft für ein Partikel ergibt sich aus der verdrängten Masse des umgebenden Mediums

$$(F_g + F_{lift}) \frac{1}{\rho_d} = \alpha_d g \left(1 - \frac{\rho_c}{\rho_d} \right) \delta V. \quad (2.26)$$

Bei großen Dichteverhältnissen $\frac{\rho_d}{\rho_c}$, wird deutlich, dass die Auftriebskraft im Vergleich zur Gewichtskraft vernachlässigt werden kann.

Bassetkraft

Die Bassetkraft, in der Literatur [13] auch als *History Term* bezeichnet, berücksichtigt die Veränderung des momentanen Widerstandes durch vorher abgeschlossene Beschleunigungsvorgänge. Die Bassetkraft kann vernachlässigt werden, wenn das Dichteverhältnis $\frac{\rho_d}{\rho_c}$, wie es in dieser Arbeit betrachtet wird, groß ist.

Zusammenfassung Impulsaustausch

Werden die einzelnen Kräfte, die im Rahmen dieser Arbeit berücksichtigt werden (Widerstandskraft und zusätzliche Druckkraft), zusammengefasst, kann für die Terme $\overline{M}_{i,d}$ und $\overline{M}_{i,c}$ in der Impulsgleichung für die kontinuierliche Phase (Formel (2.17)) und für die disperse Phase (Formel (2.18)), folgender Gesamtausdruck gegeben werden.

$$\overline{M}_{i,d} = -\overline{M}_{i,c} = \frac{3}{4} \frac{\alpha_d \rho_c C_d}{D_p} |\overline{\mathbf{u}}_{rel}| \overline{u}_{i,rel} - 0.37 \rho_c C_d |\overline{\mathbf{u}}_{rel}|^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_d). \quad (2.27)$$

Der Widerstandskoeffizient C_d ist durch Formel (2.23) bestimmt. Im Folgenden wird angenommen, dass der modellierte Impulsaustausch (Formel (2.27)) für die gemittelten und die ungemittelten Gleichungen verwendet werden kann.

2.4 Die Turbulenzmodellierung

In diesem Abschnitt wird die im Rahmen dieser Arbeit verwendete Turbulenzmodellierung behandelt. Für die ungeschlossenen Terme, die durch die Reynoldszerlegung in den konditioniert gemittelten Impulsgleichungen auftreten, werden Modelle zur Schließung der Gleichungen vorgestellt. Dabei unterscheidet sich die Modellierung der Turbulenz für die kontinuierliche Phase von der dispersen Phase. Daher werden diese getrennt betrachtet.

Um im Gebiet der Mehrphasenströmungen die Turbulenz zu modellieren, wurden viele Modelle auf Grundlage des bekannten k - ε -Modells von Jones und Launder [38] für einphasige Strömungen entwickelt. Die Gründe liegen darin, dass dieses Modell, zumindest für einphasige Systeme, die Turbulenz ausreichend gut wiedergeben kann und dabei die Rechenzeit nicht sehr stark ansteigt. Da dieses Modell weit verbreitet ist, sind die Grenzen und das Verhalten dieses Modells bekannt. Um nur einige zu nennen, wurden Turbulenzmodelle für Mehrphasenströmungen von Politis [68], Chen und Wood [10, 11] und Kataoka und Seriwaza [39] auf Basis des k - ε -Modells entwickelt. Auch das in dieser Arbeit verwendete Turbulenzmodell wurde von Hill [33] auf Grundlage des k - ε -Modells entwickelt.

2.4.1 Die kontinuierliche Phase

Wird in der konditioniert gemittelten Impulsgleichung der kontinuierlichen Phase die Größe Geschwindigkeit $u_{i,c}$ nach der Reynoldszerlegung in einen Mittelwert und eine Schwankungsgröße aufgeteilt

$$u_{i,c} = \bar{u}_{i,c} + u'_{i,c}, \quad (2.28)$$

erhält man nach einigen Umformungen aus dem konvektiven Term einen ungeschlossenen Ausdruck in der Form

$$\bar{R}_{ij,c} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_c \rho_c \overline{u'_{i,c} u'_{j,c}}. \quad (2.29)$$

Verwendet man analog zu einphasigen Systemen den Wirbelviskositäts-Ansatz vorgestellt von Boussinesq, kann der sogenannte Reynoldsspannungstensor in Kombination mit einem k - ε -Modell wie folgt geschrieben werden

$$-\rho_c \overline{u'_{i,c} u'_{j,c}} = \mu_c^t \left[\frac{\partial \bar{u}_{i,c}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_{j,c}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}_{k,c}}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] - \frac{2}{3} \rho_c k \delta_{ij}. \quad (2.30)$$

Die turbulente kinetische Energie k und die turbulente Viskosität μ_c^t , müssen modelliert werden. Mit der Verwendung des k - ε -Modells kann die turbulente Viskosität μ_c^t über die zwei transportierten Größen turbulente kinetische Energie k und ihre Dissipationsrate ε über folgende Beziehung bestimmt werden

$$\mu_c^t = C_\mu \rho_c \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (2.31)$$

wobei C_μ ein dimensionsloser Modellparameter ist (siehe Tabelle 2.1).

Die konditioniert gemittelten k - ε Gleichungen

Für die Bestimmung der noch unbekannten Größen k , ε und μ_c^t wird die Beziehung (2.31), eine Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie und eine Transportgleichung für die Dissipationsrate der turbulenten kinetischen Energie verwendet. Bei der Herleitung der Gleichungen des einphasigen k - ε -Modells entstehen ungeschlossenen Terme, die modelliert werden. Diese Terme treten auch bei der Herleitung des zweiphasigen k - ε -Modells auf. Hill übernimmt für diese ungeschlossenen Terme die Modellierung des einphasigen k - ε -Modells. Zusätzlich treten im zweiphasigen k - ε -Modell noch weitere ungeschlossene Terme aufgrund der dispersen Phase auf, die über bereits bekannte Größen modelliert werden. Daraus ergibt sich die geschlossene Gleichung für die turbulente kinetische Energie zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_c \alpha_c k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho_c \alpha_c k \bar{u}_{i,c}) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_c \left[\mu_c + \frac{\mu_c^t}{\sigma_k} \right] \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) \\ &+ \alpha_c G - \rho_c \alpha_c \varepsilon \\ &+ S_{dk}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Für die Transportgleichung der Dissipationsrate ε der turbulenten kinetischen Energie ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_c \alpha_c \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho_c \alpha_c \varepsilon \bar{u}_{i,c}) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_c \left[\mu_c + \frac{\mu_c^t}{\sigma_\varepsilon} \right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) \\ &+ C_1 \alpha_c \frac{\varepsilon}{k} G - C_2 \rho_c \alpha_c \frac{\varepsilon^2}{k} \\ &+ C_2 \frac{\varepsilon}{k} S_{d\varepsilon}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

mit

$$G = \mu_c^t \left[\frac{\partial \bar{u}_{i,c}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_{j,c}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}_{k,c}}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \frac{\partial \bar{u}_{i,c}}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \rho_c k \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}_{i,c}}{\partial x_j} \quad (2.34)$$

und

$$S_{dk} = S_{d\epsilon} = \frac{3}{4} \frac{\alpha_d \rho_c C_d}{d} |\bar{\mathbf{u}}_{rel}| \bar{u}_{i,rel} \bar{u}_{i,rel} - 0.37 \rho_c C_d |\bar{\mathbf{u}}_{rel}|^2 \bar{u}_{i,rel} \frac{\partial \alpha_d}{\partial x_i}. \quad (2.35)$$

Der zusätzliche Quellterm S_{dk} enthält Ausdrücke, die abgeleitet sind von Formel (2.22) und (2.24). Dadurch, dass der Quellterm durch $\bar{\mathbf{u}}_{rel}^2$ positiv ist, produziert dieser Term hauptsächlich Turbulenz und bildet die widerstandsinduzierte Turbulenzproduktion ab. Die Modellparameter C_μ , C_1 , C_2 , σ_k und σ_ϵ des k - ϵ -Modells bleiben gegenüber den Modellparametern im einphasigen Fall unverändert. Die Werte sind der folgenden Tabelle 2.1 zu entnehmen.

Tabelle 2.1.: Werte der Modellparameter des k - ϵ -Modells

C_μ	C_1	C_2	σ_k	σ_ϵ
0.09	1.44	1.92	1.3	1.0

2.4.2 Die disperse Phase

Für die Modellierung der Turbulenz der dispersen Phase bietet sich analog zur kontinuierlichen Phase ebenfalls ein Zwei-Gleichungs-Modell an. Für die disperse Phase gilt dann für den Reynoldsspannungstensor

$$-\rho_d \overline{u'_{i,d} u'_{j,d}} = \mu_d^t \left[\frac{\partial \bar{u}_{i,d}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_{j,d}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}_{k,d}}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] - \frac{2}{3} \rho_c k_d \delta_{ij}, \quad (2.36)$$

wobei μ_d^t die turbulente Viskosität der dispersen Phase und k_d die turbulente kinetische Energie der dispersen Phase ist. Von Nachteil ist, dass bei der Verwendung eines solchen Ansatzes zwei Transportgleichungen für die Bestimmung der turbulenten Größen der dispersen Phase gelöst werden müssen. Andere Modelle, die keine zusätzlichen Transportgleichungen für die turbulenten Größen benötigen, bestimmen die turbulente Viskosität der dispersen Phase $\nu_d^t = \frac{\mu_d^t}{\rho_d}$ über eine Beziehung mit der turbulenten Viskosität der kontinuierlichen Phase $\nu_c^t = \frac{\mu_c^t}{\rho_c}$. Das von Peskin [67] vorgeschlagene Modell lautet

$$\frac{\nu_d^t}{\nu_c^t} = 1 - \frac{\tau_l^2 \epsilon}{15 \nu_c B + 2} \quad (2.37)$$

mit

$$B = \frac{2\tau_p}{\tau_l}. \quad (2.38)$$

Hierbei ist τ_p die Partikelrelaxationszeit und τ_l das integrale lagrangesche Zeitmaß. Die turbulente kinetische Energie der dispersen Phase wird über folgende Beziehung bestimmt

$$k_d = k \frac{\tau_l}{\tau_p + \tau_l}. \quad (2.39)$$

Chen und Wood [11] schlagen für das Verhältnis der turbulenten Viskositäten folgenden Ansatz vor

$$\frac{\nu_d^t}{\nu_c^t} = \frac{\tau_e}{\tau_p + \tau_e} \quad (2.40)$$

mit einem Zeitmaß für die Wirbel $\tau_e = 0.165 \frac{k}{\varepsilon}$. Von Politis [68] wurde ein ähnlicher Vorschlag gemacht, indem ein einfacher Zusammenhang zwischen den Fluktuationen der kontinuierlichen Phase u'_c und der dispersen Phase u'_d formuliert und als *Responsekoeffizient* C_t definiert wird. Die Definition von Politis ist

$$C_t = \frac{u'_d}{u'_c}. \quad (2.41)$$

Ausgehend von dieser Definition betrachtet Hill die einzelnen Komponenten des Reynoldsspannungstensors der kontinuierlichen und der dispersen Phase. Folglich wäre der Responsekoeffizient kein Skalar, sondern ein Tensor $C_{ij,t}$ und die Beziehung zwischen den Komponenten des Reynoldsspannungstensors der kontinuierlichen und dispersen Phase wäre definiert über

$$\overline{u'_{i,d} u'_{j,d}} = C_{ij,t} \overline{u'_{i,c} u'_{j,c}}, \quad \text{keine Summation über } i \text{ oder } j. \quad (2.42)$$

Für die einzelnen Normalspannungskomponenten gilt dann Formel (2.43) und für die Scherspannungskomponenten (2.44)

$$\overline{u'_{i,d} u'_{i,d}} = C_{ii,t} \overline{u'_{i,c} u'_{i,c}} \quad (2.43)$$

und

$$\overline{u'_{i,d} u'_{j,d}} = C_{ij,t} \overline{u'_{i,c} u'_{j,c}}. \quad (2.44)$$

Für die turbulente kinetische Energie der dispersen Phase k_d gilt in Abhängigkeit der kontinuierlichen Phase k_c dann

$$\begin{aligned} k_d &= \frac{1}{2} \left(\overline{u'_{1,d}u'_{1,d}} + \overline{u'_{2,d}u'_{2,d}} + \overline{u'_{3,d}u'_{3,d}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(C_{11,t} \overline{u'_{1,c}u'_{1,c}} + C_{22,t} \overline{u'_{2,c}u'_{2,c}} + C_{33,t} \overline{u'_{3,c}u'_{3,c}} \right). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Dieses Modell ergibt sechs unabhängige Komponenten für den Responsekoeffiziententensor. Hill schlägt eine Reduktion vor, indem ein Korrelationskoeffizient $C_{ij,korr}$ verwendet wird, der definiert ist über

$$C_{ij,korr} = \frac{\overline{u'_{i,d}u'_{j,d}}}{\sqrt{\overline{u'_{i,d}u'_{i,d}}} \sqrt{\overline{u'_{j,d}u'_{j,d}}}}. \quad (2.46)$$

Wird nun die Annahme getroffen, dass der Korrelationskoeffizient $C_{ij,korr} = konst.$ und die nichtdiagonalen Komponenten des Responsekoeffiziententensors über die Diagonalkomponenten ausgedrückt werden können, ergibt sich

$$\overline{u'_{i,d}u'_{j,d}} = C_{ij,korr} C_{ii,t} C_{jj,t} \sqrt{\overline{u'_{i,c}u'_{i,c}}} \sqrt{\overline{u'_{j,c}u'_{j,c}}}. \quad (2.47)$$

Dadurch reduziert sich die Anzahl der zu bestimmenden Komponenten des Responsekoeffiziententensors zu drei ($C_{11,t}$, $C_{22,t}$ und $C_{33,t}$). Eine weitere Vereinfachung kann durch die Annahme, dass die drei Normalspannungen über einen Koeffizienten bestimmt werden können, erreicht werden. Dies ist bei isotroper Turbulenz der Fall und es folgt mit $C_{ij,korr} = 1$

$$\overline{u'_{i,d}u'_{j,d}} = C_t \overline{u'_{i,c}u'_{j,c}} \quad (2.48)$$

und der Responsekoeffizient ist bestimmt durch

$$C_t = \frac{\sqrt{\overline{u'_{i,d}u'_{i,d}}}}{\sqrt{\overline{u'_{i,c}u'_{i,c}}}}. \quad (2.49)$$

Politis erarbeitete einen Ausdruck aus der Partikelbewegungsgleichung, mit der die Fluktuation der dispersen Phase u'_d über die Fluktuationen der kontinuierlichen Phase u'_c beschrieben werden kann

$$u'_d = u'_c \left(1 - \exp^{-\frac{\tau_l}{\tau_p}} \right), \quad (2.50)$$

wobei das lagrangesche Zeitmaß τ_l gegeben ist durch

$$\tau_l = 1.25 \frac{k}{\varepsilon}. \quad (2.51)$$

Die Partikelrelaxationszeit τ_p kann über Formel (2.10) bestimmt werden. Für $\tau_p \ll \tau_l$ ergibt sich $C_t \rightarrow 1$, was bedeutet, dass das Partikel der Strömung sehr gut folgt und umgekehrt für große Partikelrelaxationszeiten $\tau_p \gg \tau_l$ die Partikel den Fluktuationen der Strömung kaum folgen.

2.5 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt sind die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Gleichungen zusammengefasst. Die Gleichungen von Hill, die über eine konditionierte Ensemble-Mittelung für die Two-Fluid-Methode bestimmt wurden, werden auch für die Multi-Fluid-Methode verwendet. Für n disperse Phasen werden folgenden Gleichungen für die Multi-Fluid-Methode verwendet.

Die Massenbilanzen

$$\rho_c \frac{\partial \alpha_c}{\partial t} + \rho_c \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_c \bar{u}_{i,c}) = \rho_c \bar{K}_c, \quad (2.52)$$

$$\rho_d \frac{\partial \alpha_{d,n}}{\partial t} + \rho_d \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_d \bar{u}_{i,d,n}) = \rho_d \bar{K}_{d,n}, \quad (2.53)$$

$$\alpha_c + \sum_n \alpha_{d,n} = 1. \quad (2.54)$$

Die Impulsbilanzen

$$\begin{aligned} \rho_c \frac{\partial \alpha_c \bar{u}_{i,c}}{\partial t} + \rho_c \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_c \bar{u}_{i,c} \bar{u}_{j,c}) = & -\alpha_c \frac{\partial p}{\partial x_i} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha_c (\mu_c + \mu_c^t) \left[\frac{\partial \bar{u}_{i,c}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_{i,c}}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}_{k,c}}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \right) \\ & - \rho_c \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_c k \delta_{ij}) + \alpha_c \rho_c g_i + \bar{M}_{i,c} + \rho_c \bar{K}_c \bar{u}_{i,c}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned}
\rho_d \frac{\partial \alpha_{d,n} \bar{u}_{i,d,n}}{\partial t} + \rho_d \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha_d \bar{u}_{i,d,n} \bar{u}_{j,d,n} \right) &= -\alpha_d \frac{\partial p}{\partial x_i} \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha_d \mu_d \left[\frac{\partial \bar{u}_{i,d,n}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_{i,d,n}}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}_{k,d,n}}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha_d C_t^2 \frac{\rho_d}{\rho_c} \mu_c^t \left[\frac{\partial \bar{u}_{i,c}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_{i,c}}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}_{k,c}}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \right) \\
&- \rho_d \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha_{d,n} C_t^2 k \delta_{ij} \right) + \alpha_{d,n} \rho_d g_i + \bar{M}_{i,d,n} + \rho_d \bar{K}_d \bar{u}_{i,d},
\end{aligned} \tag{2.56}$$

$$\bar{M}_{i,d,n} = \frac{3}{4} \frac{\alpha_{d,n} \rho_c C_d}{d_n} |\bar{u}_{rel,n}| \bar{u}_{i,rel,n} - 0.37 \rho_c C_d |\bar{u}_{rel,n}| \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_{d,n}), \tag{2.57}$$

$$\bar{M}_{i,c} = \sum_n \bar{M}_{i,d,n}. \tag{2.58}$$

Die k - ε Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_c \alpha_c k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho_c \alpha_c k \bar{u}_{i,c}) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_c \left[\mu_c + \frac{\mu_c^t}{\sigma_k} \right] \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) \\
&+ \alpha_c G - \rho_c \alpha_c \varepsilon \\
&+ S_{dk},
\end{aligned} \tag{2.59}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_c \alpha_c \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho_c \alpha_c \varepsilon \bar{u}_{i,c}) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_c \left[\mu_c + \frac{\mu_c^t}{\sigma_\varepsilon} \right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) \\
&+ C_1 \alpha_c \frac{\varepsilon}{k} G - C_2 \rho_c \alpha_c \frac{\varepsilon^2}{k} \\
&+ C_2 \frac{\varepsilon}{k} S_{d\varepsilon},
\end{aligned} \tag{2.60}$$

$$G = \mu_c^t \left[\frac{\partial \bar{u}_{i,c}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_{j,c}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}_{k,c}}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \frac{\partial \bar{u}_{i,c}}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \rho_c k \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}_{i,c}}{\partial x_j}, \tag{2.61}$$

$$S_{dk} = S_{d\varepsilon} = \sum_n \bar{M}_{i,d,n} \bar{u}_{i,rel,n}. \tag{2.62}$$

Annahmen

Bei der Abbildung von Mehrphasensystemen mit dieser Methode wird angenommen, dass

- für jede betrachtete Phase die Kontinuumsannahme gilt,
- alle abgebildeten Phasen einem Druck p unterliegen,
- jede Phase inkompressibel ist,
- die Dichte jeder Phase konstant ist.

Die Annahmen für die betrachteten dispersen Phasen sind:

- jede Phase besteht aus sphärischen Partikeln,
- die laminare dynamische Viskosität der dispersen Phase ist vernachlässigbar,
- großes Dichteverhältnis ($\rho_d \gg \rho_c$).

Durch die Verwendung eines Zwei-Gleichungsmodells (k - ε) werden folgenden Annahmen getroffen:

- Gleichgewichtsturbulenz,
- Isotropie der Turbulenz,
- Turbulenz der dispersen Phase kann über die Turbulenz der kontinuierlichen Phase bestimmt werden

Für die disperse Phase werden folgende Kräfte berücksichtigt:

- Gravitation,
- aerodynamischer Widerstand.



3 Direct Quadrature Method of Moments (DQMOM)

In diesem Kapitel wird die DQMOM erläutert. Mit dieser Methode ist es möglich, die Entwicklung von Verteilungsfunktionen in Raum und Zeit zu bestimmen. Zunächst werden Grundlagen von Verteilungsfunktionen in technisch relevanten Sprays erläutert. Danach werden Approximationen eingeführt, die zur Herleitung der DQMOM-Transportgleichungen und des DQMOM-Gleichungssystems benötigt werden. Im Anschluss wird die Darstellbarkeit von Verdampfungsvorgängen mit der DQMOM erläutert. Darauf aufbauend wird eine Erweiterung vorgestellt, mit der die vollständige Verdampfung abgebildet werden kann. Es folgt die Beschreibung des Verdampfungsmodells, welches in dieser Arbeit verwendet wird. Dieses Kapitel schließt mit einer Erläuterung über die Kopplung der DQMOM mit der Multi-Fluid-Methode (siehe Kapitel 2). Tropfen oder Partikel werden hier als sphärisch betrachtet.

3.1 Grundlagen zur Verteilungsfunktion von Tropfen oder Partikeln

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Grundlagen zur statistischen Beschreibung von Sprays in technischen Systemen erläutert.

3.1.1 Diskrete Verteilungen

Um Tropfen oder Partikel zu charakterisieren, besteht die Möglichkeit, den Tropfendurchmesser d , die Tropfenoberfläche $S = \pi d^2$ oder auch das Tropfenvolumen $V = \frac{\pi}{6} d^3$ zu verwenden. Betrachtet man ein Volumen δV , in dem Tropfen einer bestimmten Größe vorhanden sind, und zählt die Tropfen, erhält man durch Auftragen der Anzahl N_d über den Durchmesser ein Diagramm Abbildung 3.1 (links). Sind in dem betrachteten Volumen δV Tropfen unterschiedlicher Größe vorhanden und fasst man Tropfen der Durchmesser $d \pm \Delta d$ zusammen, erhält man durch erneutes Auftragen der Anzahl N_d über die Durchmesserintervalle $d \pm \Delta d$ zum Beispiel das Diagramm in Abbildung 3.1 (rechts). Solche Diagramme werden diskrete Tropfengrößenverteilungen genannt. Ist nur eine Tropfengröße vorhanden, wird die Verteilung als monodispers und sind mehrere Tropfengrößen vorhanden, wird sie als polydispers bezeichnet.

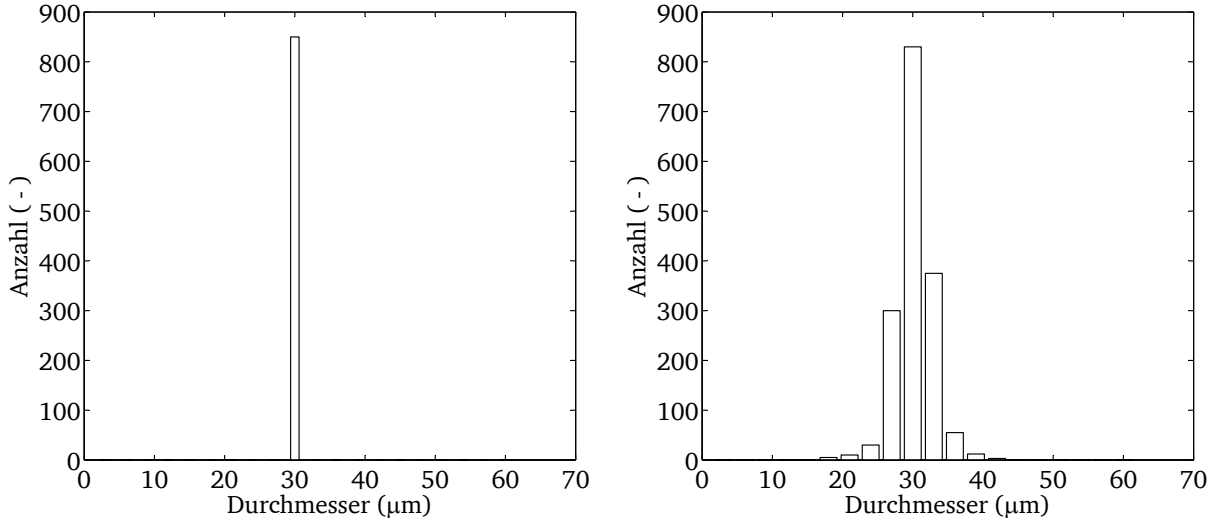


Abbildung 3.1.: Beispiel diskreter Tropfengrößenverteilungen: Eine Tropfengröße, monodispers (links), unterschiedliche Tropfengrößen, polydispers (rechts)

Für gewöhnlich wird die Anzahl der Tropfen N_d in einem Intervall auf die Gesamtanzahl N_{ges} der Tropfen im betrachteten Volumen δV normiert und man erhält relative Häufigkeiten n_d . Zur Charakterisierung von Tropfengrößenverteilungen werden häufig die folgenden Größen verwendet:

- mittlerer Durchmesser d_m
- Varianz σ^2 , Standardabweichung σ
- Sauterdurchmesser d_{32} .

Der mittlere Durchmesser der Verteilung kann über

$$d_m = \sum_{i=1}^N d_i n_{d,i} \quad (3.1)$$

bestimmt werden, wobei N die Anzahl der vorhandenen Intervalle ist. Die Varianz σ^2 und die Standardabweichung σ sind ein Maß für die Streuung der Verteilung und sind definiert über

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^N (d_i - d_m)^2 n_{d,i}. \quad (3.2)$$

Eine weitere wichtige Größe ist der Sauterdurchmesser (SMD) d_{32} , der das Verhältnis vom gesamten Tropfenvolumen und der gesamten Tropfenoberfläche darstellt. Der Sauterdurchmesser kann über folgende Beziehung bestimmt werden

$$d_{32} = \frac{\sum_{i=1}^N n_{d,i} d_i^3}{\sum_{i=1}^N n_{d,i} d_i^2}. \quad (3.3)$$

3.1.2 Kontinuierliche Verteilungsfunktionen

Kontinuierliche Tropfengrößenverteilungsfunktionen $f(d)$ erhält man, wenn das betrachtete Intervall $d \pm \Delta d$ der diskreten Tropfengrößenverteilung klein wird und $\Delta d \rightarrow 0$ geht. Für kontinuierliche Tropfengrößenverteilungsfunktionen existieren analog zu den diskreten Tropfengrößenverteilungen die charakteristischen Größen. Der mittlere Durchmesser d_m wird dann zum Erwartungswert μ der Verteilungsfunktion und ist definiert über

$$\mu = \int_0^{d_{\max}} d f(d) dd, \quad (3.4)$$

wobei d_{\max} der maximale Durchmesser ist. Die Varianz kann über

$$\sigma^2 = \int_0^{d_{\max}} (d - \mu)^2 f(d) dd \quad (3.5)$$

bestimmt werden.

Die Momente

Eine Verteilungsfunktion $f(d)$ kann über ihre n Momente² m_n charakterisiert werden, falls diese existieren. Die Definition der Momente einer allgemeinen Verteilungsfunktion [35] ist gegeben durch

$$m_n = \int_0^{\infty} d^n f(d) dd. \quad (3.6)$$

Für Verteilungsfunktionen über den Durchmesser können die Momente wie folgt interpretiert werden [75].

² Die Bezeichnung als *Moment einer Verteilungsfunktion* kann man erklären, indem man sich ein Balken mit gleichmäßiger Massenverteilung vorstellt. Der Balken ist so orientiert, dass der Balken auf der Abszisse und die Mitte des Balkens im Ursprung liegt. Das erste Moment ($n = 1$) der Massenverteilung ist dann der Schwerpunkt. Das zweite Moment ist das Trägheitsmoment, wenn der Balken um die Ordinate rotiert.

- 0. Moment ist die Gesamtanzahl der Tropfen
- 1. Moment ist der Erwartungswert und proportional zum mittleren Durchmesser
- 2. Moment ist die Varianz und proportional zur Tropfenoberfläche
- 3. Moment ist die Schiefe und proportional zum Tropfenvolumen

Demnach können über die Momente reduzierte Informationen über eine Verteilungsfunktion gewonnen werden. Der Sauterdurchmesser (siehe auch (3.3)) kann aus den Momenten bestimmt werden, indem das 3. Moment durch das 2. Moment geteilt wird.

Verwendete kontinuierliche Verteilungsfunktionen

Häufig werden experimentell bestimmte Verteilungen über kontinuierliche Verteilungsfunktionen dargestellt. In [50] werden folgende kontinuierliche Verteilungsfunktionen dafür vorgeschlagen

- Normalverteilung
- logarithmische Normalverteilung.

Die Normalverteilung ist bestimmt über

$$f(d) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{d-d_m}{\sigma}\right)^2\right). \quad (3.7)$$

Hierbei ist d_m der mittlere Durchmesser und σ die Standardabweichung. Die logarithmische Normalverteilung ist aus der Normalverteilung abgeleitet und kann bestimmt werden über

$$f(d) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma d} \exp\left(-\frac{(\ln d - \ln d_m)^2}{2\sigma^2}\right) & d > 0, \\ 0 & d \leq 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

In Abbildung 3.2 sind diese beiden kontinuierlichen Verteilungsfunktionen mit unterschiedlichen Standardabweichungen σ dargestellt. Dabei beträgt der gewählte mittlere Durchmesser $d_m = 30 \mu\text{m}$ bei den Normalverteilungen und $d_m = 15 \mu\text{m}$ bei den logarithmischen Normalverteilungen.

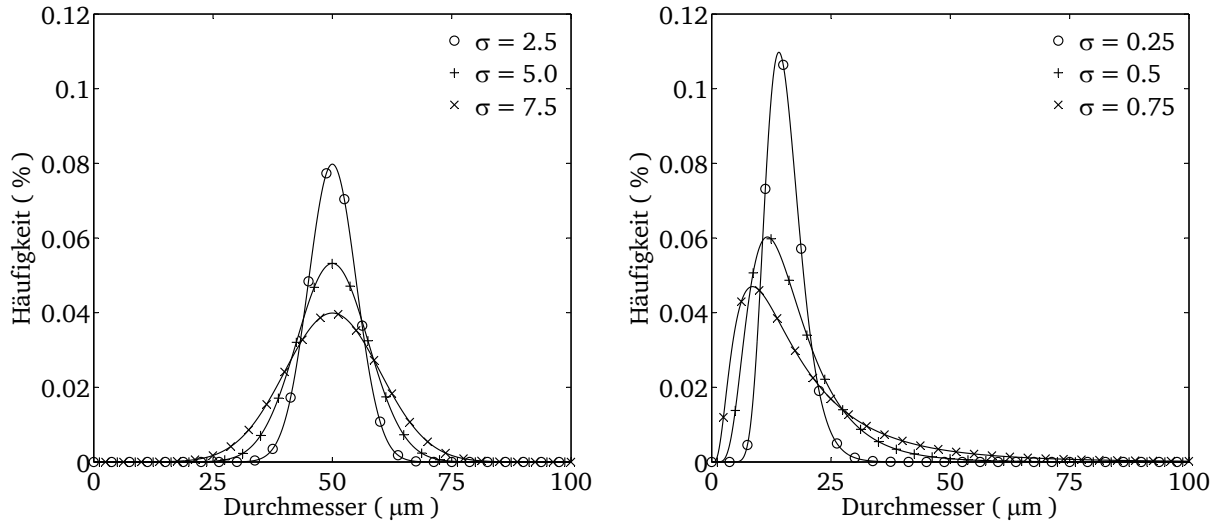


Abbildung 3.2.: Beispiel für kontinuierliche Verteilungsfunktionen mit Variation der Standardabweichung: Normalverteilung (links), Log-Normalverteilung (rechts)

3.1.3 Approximation der Verteilungsfunktion

In QMOM und DQMOM steckt die Annahme, dass eine Verteilungsfunktion $f(d)$, deren Momente m_n bis zu einer Ordnung n bekannt sind, über eine Summe von N Dirac-Funktionen approximiert werden kann

$$f(d) \cong \tilde{f}(d) = \sum_{\alpha=1}^N w_{\alpha} \delta [d - \langle d \rangle_{\alpha}] . \quad (3.9)$$

Hierbei sind w_{α} die Wichtungen und $\langle d \rangle_{\alpha}$ die Abszissenwerte am Knoten α und werden als Quadratur-Variablen bezeichnet. Die Quadratur-Variablen können über den Product-Difference-Algorithmus³ (PD-Algorithmus) [8, 27] bestimmt werden. Für die Bestimmung von N Abszissenwerten und N Wichtungen benötigt der PD-Algorithmus die ersten n Momente m_n mit $n = 0, \dots, 2N - 1$ der Verteilungsfunktion $f(d)$. Die erhaltenen Abszissenwerte können als repräsentative Durchmesser $\langle d \rangle_{\alpha}$ und w_{α} als die zugehörigen Wichtungen am Knoten $\alpha = 1, \dots, N$ betrachtet werden. Es gilt $\langle d \rangle_1 < \langle d \rangle_{\alpha} < \langle d \rangle_N$. Der PD-Algorithmus ist so konstruiert, dass die Quadratur-Variablen (Abszissen und Wichtungen) so berechnet werden, dass die Momente m_n der Verteilungsfunktion $f(d)$ möglichst gut wiedergegeben werden. Die approximierten Momente \tilde{m}_n können aus den Quadratur-Variablen über

$$m_n \cong \tilde{m}_n = \sum_{\alpha=1}^N w_{\alpha} \langle d \rangle_{\alpha}^n \quad (3.10)$$

³ siehe auch Anhang A

bestimmt werden. In Abbildung 3.3 sind kontinuierliche Verteilungsfunktionen und die zugehörigen Wichtungen und Durchmesser dargestellt, die sich nach Anwendung des PD-Algorithmus mit $N = 3$ ergeben.

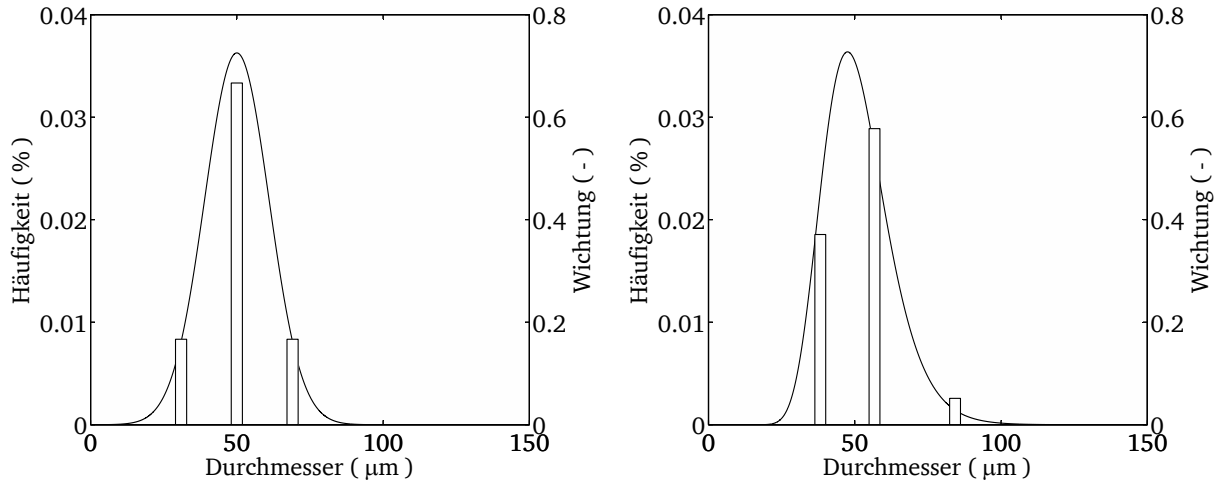


Abbildung 3.3.: Kontinuierliche Verteilungsfunktionen mit repräsentativen Durchmessern und den zugehörigen Wichtungen aus dem PD-Algorithmus: Normalverteilung (links), Log-Normalverteilung (rechts)

In Abbildung 3.4 ist ein Vergleich der ursprünglichen Momente m_n und der approxiierten Momente \tilde{m}_n zu sehen. Für den Vergleich wurden je fünf Normal- und Log-Normalverteilungen mit unterschiedlichen Standardabweichungen σ verwendet. Mit dem PD-Algorithmus wurden für jede Verteilung drei Durchmesser und drei Wichtungen berechnet, mit denen über die Formel (3.10) die Momente \tilde{m}_n bestimmt wurden. Anschließend wurde der Fehler nach Formel (3.11) bestimmt

$$Fehler_n = \frac{m_n - \tilde{m}_n}{m_n}, \quad n = 0, \dots, 2N. \quad (3.11)$$

Für $N = 3$ kann der PD-Algorithmus die ersten sechs Momente ($n = 0, \dots, 5$) sehr gut wiedergeben. Da zur Berechnung von $\langle d \rangle_\alpha$ und $\langle w \rangle_\alpha$ nur sechs Momente verwendet wurden, kann das 6. Moment nur mit deutlichem Fehler abgebildet werden. Die für diese Arbeit interessanten Momente ($n = 0, \dots, 3$) werden sehr gut wiedergegeben.

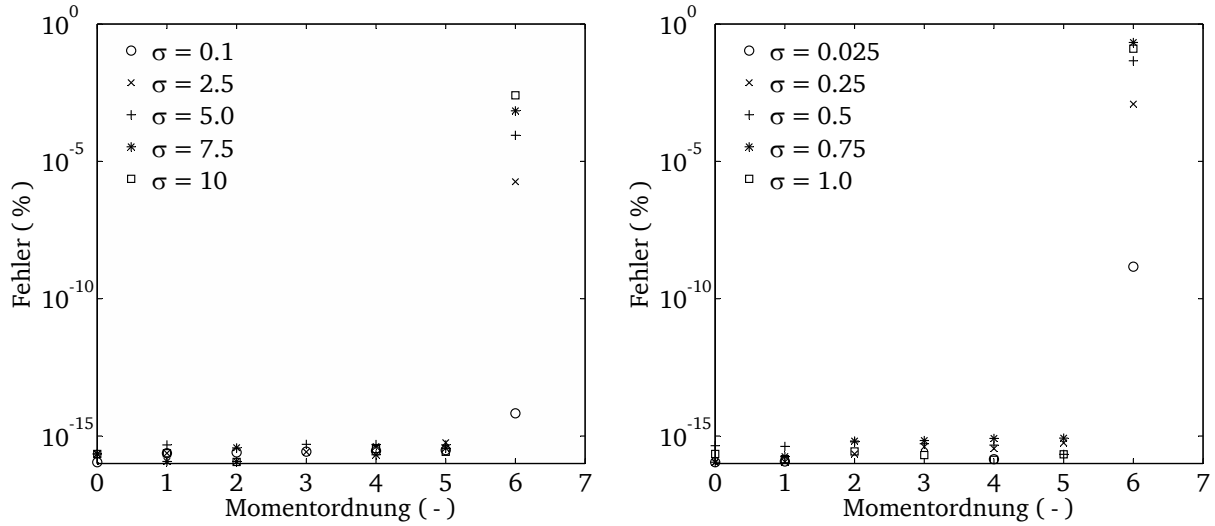


Abbildung 3.4.: Fehler zwischen vorgegebenen m_n und approximated \tilde{m}_n Momenten mit Variation der Standardabweichung σ : Normalverteilung (links), Log-Normalverteilung (rechts)

3.2 Die DQMOM-Transportgleichungen

Mit der DQMOM wird die räumliche und zeitliche Entwicklung einer Verteilungsfunktion betrachtet. Wichtig ist, dass nicht die Verteilungsfunktion transportiert wird, sondern die Quadratur-Variablen. Mit den Quadratur-Variablen können die Momente der Verteilungsfunktion rekonstruiert werden (3.10). Die Quadraturvariablen werden nur einmal mit dem PD-Algorithmus bestimmt, um die Anfangswerte der Quadratur-Variablen zu generieren. Die Approximation der Verteilungsfunktion wird auch für mehrdimensionale Verteilungsfunktionen $f(\xi_i, x, t)$ verwendet (siehe Abschnitt 3.3.2). Dabei ist ξ_i der Eigenschaftsvektor. Beispiele für Eigenschaften sind Tropfendurchmesser und -geschwindigkeiten. In diesem Abschnitt wird nur eine Eigenschaft, der Durchmesser d , verwendet. Daher wird $\xi_i = d$ und die betrachteten Verteilungsfunktionen zu $f(d, x, t)$. Wie bereits erwähnt, interessieren die räumliche und zeitliche Entwicklung der Verteilungsfunktion $f(d, x, t)$ und vor allem die Entwicklung der Momente. Setzt man nun zur Herleitung der DQMOM-Transportgleichungen die approximierte Verteilungsfunktion $\tilde{f}(d)$ nach Formel (3.9) in eine allgemeine Transportgleichung ein [24, 53], erhält man (3.12). Werden räumliche und zeitliche Abhängigkeiten der Verteilungsfunktion und der Quadratur-Variablen der Übersicht wegen nicht aufgeführt, ergibt sich für den Transport der approximated Verteilungsfunktion

$$\frac{\partial \tilde{f}(d)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [\langle u_i | d \rangle \tilde{f}(d)] = S_d(d), \quad (3.12)$$

wobei $\langle u_i | d \rangle$ die mittlere Geschwindigkeit konditioniert auf den Durchmesser d darstellt. Betrachtet man eine Tropfengrößenverteilung, kann $\langle u_i | d \rangle$ als mittlere Geschwindigkeit eines Tropfens mit dem Durchmesser d interpretiert werden. Diese Geschwindigkeit kann beispielsweise über eine algebraische Beziehung oder mit einer Transportgleichung modelliert werden. Auf der rechten Seite steht der Quellterm $S_d(d)$. Dieser enthält Integrale und Ableitungen der Größe d , wenn Effekte wie Zerfall, Koaleszenz oder Verdampfung berücksichtigt werden. Wird die Verteilungsfunktion $\tilde{f}(d)$ in Gleichung (3.12) durch den Ausdruck (3.9) ersetzt, erhält man nach einigen Umformungen und der Einführung des gewichteten Durchmessers $\varsigma_\alpha = w_\alpha \langle d \rangle_\alpha$ folgenden Ausdruck [54]

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^N \delta(d - \langle d \rangle_\alpha) \left[\frac{\partial w_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle u_i \rangle_\alpha w_\alpha) \right] \\ & - \sum_{\alpha=1}^N \delta'(d - \langle d \rangle_\alpha) \left[\frac{\partial \varsigma_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle u_i \rangle_\alpha \varsigma_\alpha) \right] \\ & - \langle d \rangle_\alpha \left[\frac{\partial w_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle u_i \rangle_\alpha w_\alpha) \right] = S_d(d). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Hierbei ist $\delta'(d - \langle d \rangle_\alpha)$ die erste Ableitung der Funktion $\delta(d - \langle d \rangle_\alpha)$ gemäß

$$\delta'(d - \langle d \rangle_\alpha) = \frac{\partial \delta(d - \langle d \rangle_\alpha)}{\partial d} \quad (3.14)$$

und $\langle u_i \rangle_\alpha$ die Geschwindigkeit des Durchmessers am Knoten α . Die Quadratur-Variablen am Knoten α werden somit mit ihrer charakteristischen Geschwindigkeit $\langle u_i \rangle_\alpha$ transportiert. Dies beschreibt die Polydispersität besser als die Annahme, dass alle Größen mit der gleichen Geschwindigkeit transportiert werden [19]. Die Ausdrücke in den eckigen Klammern in (3.13) haben die Form von Transportgleichungen. Diese werden als DQMOM-Transportgleichungen definiert. Werden für diese DQMOM-Transportgleichungen noch DQMOM-Quellterme a_α und b_α eingeführt, erhält man

$$\frac{\partial w_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle u_i \rangle_\alpha w_\alpha) = a_\alpha \quad (3.15)$$

und

$$\frac{\partial \varsigma_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle u_i \rangle_\alpha \varsigma_\alpha) = b_\alpha. \quad (3.16)$$

Über die DQMOM-Transportgleichungen sind die Quadratur-Variablen bekannt. Allerdings fehlen noch die Informationen über die Effekte, welche die Verteilungsfunktion

beeinflussen (Zerfall, Koaleszenz oder Verdampfung). Da in dieser Methode die Momente betrachtet werden, müssen die Einflüsse dieser Effekte im Kontext der Momente bzw. Quadratur-Variablen bestimmt werden. Dies ist über die DQMOM-Quellterme möglich. Um eine Gleichung zur Bestimmung der DQMOM-Quellterme in Abhängigkeit dieser Effekte zu erhalten, werden in (3.13) die Ausdrücke in den eckigen Klammern zunächst durch die DQMOM-Quellterme mit (3.15) und (3.16) ersetzt und man erhält

$$\sum_{\alpha=1}^N [\delta(d - \langle d \rangle_{\alpha}) + \delta'(d - \langle d \rangle_{\alpha}) \langle d \rangle_{\alpha}] a_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^N [\delta'(d - \langle d \rangle_{\alpha})] b_{\alpha} = S_d(d). \quad (3.17)$$

Damit eine Auswertung über die Momente möglich ist, wird (3.17) mit d^n multipliziert und anschließend integriert und man erhält

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^N [\delta(d - \langle d \rangle_{\alpha}) + \delta'(d - \langle d \rangle_{\alpha}) \langle d \rangle_{\alpha}] a_{\alpha} d^n dd \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^N [\delta'(d - \langle d \rangle_{\alpha})] b_{\alpha} d^n dd = \int_{-\infty}^{\infty} S_d(d) d^n dd. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Die auftretenden Integrale können mit den folgenden Beziehungen bestimmt werden

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} d^n \delta(d - \langle d \rangle_{\alpha}) dd = \langle d \rangle_{\alpha}^n \\ & \int_{-\infty}^{\infty} d^n \delta'(d - \langle d \rangle_{\alpha}) dd = -n \langle d \rangle_{\alpha}^{n-1} \\ & \int_{-\infty}^{\infty} d^n S_d(d) dd = \bar{S}_n. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Diese Operation wird als Momententransformation bezeichnet, und es ergibt sich für die Bestimmung der DQMOM-Quellterme in Abhängigkeit der Effekte

$$(1 - n) \sum_{\alpha=1}^N \langle d \rangle_{\alpha}^n a_{\alpha} + n \sum_{\alpha=1}^N \langle d \rangle_{\alpha}^{(n-1)} b_{\alpha} = \bar{S}_n. \quad (3.20)$$

Mit dieser Gleichung werden die Effekte Zerfall, Koaleszenz oder Verdampfung über die rechte Seite berücksichtigt. Die Momentenquellterme \bar{S}_n sind geschlossen, da durch die Approximation der Verteilungsfunktion nach (3.9) diese Quellterme nur noch Funktionen von den Quadratur-Variablen w_{α} und $\langle d \rangle_{\alpha}$ sind. Zur Bestimmung der DQMOM-Quellterme a_{α} und b_{α} kann nun über die Formel (3.20) für jede Zelle ein lineares Gleichungssystem der Form $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ aufgestellt und gelöst werden. Werden zur Auswertung der DQMOM-Quellterme die ersten $n = 0, \dots, 2N - 1$ Momente verwendet,

erhält man für die Aufstellung des linearen Gleichungssystems für die Matrix A mit der Dimension $2N \times 2N$ folgende Vorschrift

$$A = [A_1 \quad A_2], \quad (3.21)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ -\langle d \rangle_1^2 & \cdots & -\langle d \rangle_N^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2(1-N)\langle d \rangle_1^{(2N-1)} & \cdots & 2(1-N)\langle d \rangle_N^{(2N-1)} \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 \\ 2\langle d \rangle_1 & \cdots & 2\langle d \rangle_N \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (2N-1)\langle d \rangle_1^{(2N-2)} & \cdots & (2N-1)\langle d \rangle_N^{(2N-2)} \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Der Vektor \mathbf{x} enthält die gesuchten DQMOM-Quellterme und der Vektor \mathbf{b} enthält die Momentenquellterme \bar{S}_n

$$\mathbf{x} = [a_1 \quad \cdots \quad a_N \quad b_1 \quad \cdots \quad b_N]^T \quad (3.24)$$

und

$$\mathbf{b} = [\bar{S}_0 \quad \cdots \quad \bar{S}_{(2N-1)}]^T. \quad (3.25)$$

Durch Lösen dieses linearen Gleichungssystems ergeben sich die DQMOM-Quellterme, vorausgesetzt die Matrix A ist invertierbar⁴. Dies bedeutet, dass die Abszissenwerte $\langle d \rangle_\alpha$ eindeutig und $\langle d \rangle_\alpha \neq 0$ sein müssen.

3.3 Die Verdampfung

3.3.1 Verdampfung mit der DQMOM

Für die Beschreibung der Verdampfung mit der DQMOM kann prinzipiell jedes Verdampfungsgesetz verwendet werden. In diesem Abschnitt wird daher ein allgemeines

⁴ Matrix A ist invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$

Verdampfungsgesetz $R_v(d)$ betrachtet. Gegeben sei ein Volumen V , in dem ruhende Tropfen unterschiedlicher Größe gemäß der Verteilungsfunktion $f(d, t)$ vorhanden sind. Für die Beschreibung der Verdampfung mit der DQMOM wird zunächst die Verteilungsfunktion $f(d, t)$ gemäß Formel (3.9) mit $N = 3$ approximiert. Als Anfangswerte erhält man drei repräsentative Durchmesser $\langle d \rangle_\alpha$ und drei zugehörige Wichtungen w_α . Unter der Annahme, dass diese Tropfenverteilung nach einer gewissen Zeit t komplett verdampft, folgt, dass der Tropfendurchmesser $\langle d \rangle_1$ zum Zeitpunkt t_1 als erstes verschwindet und anschließend $\langle d \rangle_2$ gefolgt von $\langle d \rangle_3$. Mit $\langle d \rangle_1 \rightarrow 0$ bedeutet das für die DQMOM, dass das lineare Gleichungssystem (3.21)-(3.23) ab dem Zeitpunkt t_1 nicht mehr eindeutig lösbar und die Bestimmung der DQMOM-Quellterme nicht mehr möglich ist.

Betrachtet man die momententransformierte Gleichung (3.20) mit dem Verdampfungsquellterm

$$\bar{S}_n = \int_0^\infty d^n \frac{\partial}{\partial d} (R_v(d) f(d, t)) dd, \quad (3.26)$$

folgt nach Umformungen die momententransformierte Gleichung mit dem Momentenquellterm für die Verdampfung

$$(1 - n) \sum_{\alpha=1}^N \langle d \rangle_\alpha^n a_\alpha + n \sum_{\alpha=1}^N \langle d \rangle_\alpha^{(n-1)} b_\alpha = [d^n R_v(d) f(d)]_0^\infty - n \int_0^\infty d^{n-1} R_v(d) f(d, t) dd. \quad (3.27)$$

Mit der Annahme, dass in der Verteilungsfunktion $f(d, t)$ der maximale Durchmesser einen endlichen Wert annimmt, folgt

$$(1 - n) \sum_{\alpha=1}^N \langle d \rangle_\alpha^n a_\alpha + n \sum_{\alpha=1}^N \langle d \rangle_\alpha^{(n-1)} b_\alpha = -d^n R_v(0) f(0) - n \int_0^\infty d^{n-1} R_v(d) f(d, t) dd. \quad (3.28)$$

Für die Anzahl der Tropfen, also das 0. Moment $n = 0$ folgt

$$\sum_{\alpha=1}^N a_\alpha = -R_v(0) f(0). \quad (3.29)$$

Die rechte Seite repräsentiert demnach den Verlust oder das Verschwinden von Tropfen aufgrund der Verdampfung. Dadurch, dass bei der DQMOM $\langle d \rangle_\alpha \neq 0$ eine wesentliche

Forderung ist, kann $f(0)$ nicht ausgewertet werden und der Verlust an Tropfen kann nicht abgebildet werden. Wird der Tropfenverlust ($R_v(0)f(0) = 0$) vernachlässigt führt dies dazu, dass das 0. Moment so lange unverändert bleibt, bis die erste Abszisse $\langle d \rangle_1 \rightarrow 0$. An diesem Punkt erreicht das Verfahren eine punktweise Singularität. Demnach kann die Verdampfung mit der DQMOM unter Verwendung der n Momente m_n nicht korrekt dargestellt werden.

3.3.2 Erweiterung der DQMOM nach Fox

Fox [22] schlägt eine Erweiterung vor, mit der die vollständige Verdampfung mit der DQMOM dargestellt werden kann. In diesem Abschnitt wird diese Erweiterung erläutert. Fox verwendet zur Herleitung der DQMOM-Transportgleichungen die Williams-Spray-Gleichung [88] und eine Verteilungsfunktion mit den Eigenschaften Tropfenvolumen und Tropfengeschwindigkeiten $f(v, \mathbf{u}, x, t)$. Die Approximation der Verteilungsfunktion (vgl. (3.9)) ergibt

$$f(v, \mathbf{u}) = \sum_{\alpha=1}^N w_{\alpha} \delta(v - v_{\alpha}) \delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\alpha}) , \quad (3.30)$$

wobei $\delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\alpha}) = \delta(u_1 - u_{1,\alpha}) \delta(u_2 - u_{2,\alpha}) \delta(u_3 - u_{3,\alpha})$ ist. Wird nur die Verdampfung R_v berücksichtigt, ergibt sich für die Williams-Spray-Gleichung [87, 88] (vgl. (3.12))

$$\frac{\partial}{\partial t} f + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i f) = - \frac{\partial}{\partial v} (R_v f) . \quad (3.31)$$

Durch Einsetzen von (3.30) in (3.31) erhält man nach einigen Umformungen die DQMOM-Transportgleichungen

$$\frac{\partial w_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\alpha} u_{i,\alpha}) = a_{\alpha} , \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho w_{\alpha} v_{\alpha}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho w_{\alpha} v_{\alpha} u_{i,\alpha}) = \rho b_{\alpha} \quad (3.33)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho w_{\alpha} v_{\alpha} u_{i,\alpha}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho w_{\alpha} u_{i,\alpha} u_{j,\alpha}) = \rho c_{i,\alpha} . \quad (3.34)$$

Die DQMOM-Quellterme a_{α} , b_{α} und c_{α} werden in Abhängigkeit des Verdampfungsquellterms auf der rechten Seite der Williams-Spray-Gleichung bestimmt. Es ist anzumerken, dass die DQMOM-Transportgleichungen (3.31)-(3.33) den Multi-Fluid-Gleichungen

entsprechen (mehr dazu in Abschnitt 3.4). Zusätzlich erhält man eine Gleichung, die anschließend momententransformiert wird. Mit dieser Gleichung werden die DQMOM-Quellterme in Abhängigkeit von dem Verdampfungsquellterm auf der rechten Seite der Williams-Spray-Gleichung bestimmt (vgl. (3.18)). Für die momententransformierte Gleichung ergibt sich für die linke Seite

$$\begin{aligned}
& \int v^l u_1^m u_2^n u_3^p \left(\frac{\partial}{\partial t} f + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i f) \right) dv du \\
&= \sum_{\alpha=1}^N (1-l) v_{\alpha}^l u_{1,\alpha}^m u_{2,\alpha}^n u_{3,\alpha}^p a_{\alpha} \\
&+ \sum_{\alpha=1}^N (l-m-n-p) v_{\alpha}^{l-1} u_{1,\alpha}^m u_{2,\alpha}^n u_{3,\alpha}^p b_{\alpha} \\
&+ \sum_{\alpha=1}^N v_{\alpha}^{l-1} u_{1,\alpha}^m u_{2,\alpha}^n u_{3,\alpha}^p \left(m u_{1,\alpha}^{-1} c_{1,\alpha} + n u_{2,\alpha}^{-1} c_{2,\alpha} + p u_{3,\alpha}^{-1} c_{3,\alpha} \right).
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Für die rechte Seite ergibt die Momententransformation des Verdampfungsquellterms folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned}
& \int v^l u_1^m u_2^n u_3^p \frac{\partial}{\partial v} (R_v f) dv du \\
&= -\delta_{l0} \Psi(t) u_{1,c}^m u_{2,c}^n u_{3,c}^p - \sum_{\alpha=1}^N l w_{\alpha} v_{\alpha}^{l-1} u_{1,\alpha}^m u_{2,\alpha}^n u_{3,\alpha}^p R_v(v_{\alpha}),
\end{aligned} \tag{3.36}$$

wobei $\Psi(t)$ den Tropfenverlust (siehe auch (3.28) und (3.29)) darstellt und u_c die Geschwindigkeiten der kontinuierlichen Phase sind. Diese Annahme ist gerechtfertigt, da Tropfen mit $v_{\alpha} = 0$ für gewöhnlich die Geschwindigkeit der kontinuierlichen Phase annehmen. Bis zu diesem Punkt gleicht dieses Verfahren dem Verfahren in Abschnitt 3.2. Um den Term $\Psi(t)$ nicht zu vernachlässigen, schlägt Fox bei der Bestimmung der DQMOM-Quellterme für die Berücksichtigung folgendes vor: Ausgehend von der gesamten momententransformierten Gleichung (3.35) und (3.36), wird zunächst der Verdampfungsquellterm getrennt betrachtet und es ergeben sich zwei momententransformierte Gleichungen

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha=1}^N (1-l) v_{\alpha}^l u_{1,\alpha}^m u_{2,\alpha}^n u_{3,\alpha}^p a_{\alpha,1} \\
&+ \sum_{\alpha=1}^N (l-m-n-p) v_{\alpha}^{l-1} u_{1,\alpha}^m u_{2,\alpha}^n u_{3,\alpha}^p b_{\alpha,1} \\
&+ \sum_{\alpha=1}^N v_{\alpha}^{l-1} u_{1,\alpha}^m u_{2,\alpha}^n u_{3,\alpha}^p \left(m u_{1,\alpha}^{-1} c_{1,\alpha,1} + n u_{2,\alpha}^{-1} c_{2,\alpha,1} + p u_{3,\alpha}^{-1} c_{3,\alpha,1} \right) \\
&= \sum_{\alpha=1}^N l w_{\alpha} v_{\alpha}^{l-1} u_{1,\alpha}^m u_{2,\alpha}^n u_{3,\alpha}^p R_v(v_{\alpha})
\end{aligned} \tag{3.37}$$

und

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha=1}^N (1-l) v_{\alpha}^l u_{1,\alpha}^m u_{2,\alpha}^n u_{3,\alpha}^p a_{\alpha,2} \\
& + \sum_{\alpha=1}^N (l-m-n-p) v_{\alpha}^{l-1} u_{1,\alpha}^m u_{2,\alpha}^n u_{3,\alpha}^p b_{\alpha,2} \\
& + \sum_{\alpha=1}^N v_{\alpha}^{l-1} u_{1,\alpha}^m u_{2,\alpha}^n u_{3,\alpha}^p \left(m u_{1,\alpha}^{-1} c_{1,\alpha,2} + n u_{2,\alpha}^{-1} c_{2,\alpha,2} + p u_{3,\alpha}^{-1} c_{3,\alpha,2} \right) \\
& = \delta_{l0} \Psi(t) u_{1,c}^m u_{2,c}^n u_{3,c}^p .
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Die getrennte Betrachtung des Verdampfungsquellterms führt zu einer getrennten Auswertung der DQMOM-Quellterme und es ergibt sich

$$a_{\alpha} = a_{\alpha,1} + a_{\alpha,2} , \tag{3.39}$$

$$b_{\alpha} = b_{\alpha,1} + b_{\alpha,2} \tag{3.40}$$

und

$$\mathbf{c}_{\alpha} = \mathbf{c}_{\alpha,1} + \mathbf{c}_{\alpha,2} . \tag{3.41}$$

Zur Bestimmung der ersten Teile der DQMOM-Quellterme $a_{\alpha,1}$, $b_{\alpha,1}$ und $\mathbf{c}_{\alpha,1}$ wird die momententransformierte Gleichung (3.37) verwendet. Wird die Anzahl der Tropfen bilanziert bzw. das 0. Moment betrachtet, muss $l = m = n = p = 0$ in (3.37) eingesetzt werden. Für die Bilanz der Masse (1. Moment) wird $l = 1$ und $m = n = p = 0$ in (3.37) eingesetzt und die Bilanzierung des Impulses ergibt $l = m = 1$ und $n = p = 0$ in (3.37). Daraus ergeben sich die DQMOM-Quellterme zu

$$a_{\alpha,1} = 0 , \tag{3.42}$$

$$b_{\alpha,1} = w_{\alpha} R_{\nu}(v_{\alpha}) \tag{3.43}$$

und

$$\mathbf{c}_{\alpha,1} = w_{\alpha} R_{\nu}(v_{\alpha}) \mathbf{u}_{\alpha} . \tag{3.44}$$

Hier ist bereits zu sehen, dass diese DQMOM-Quellterme der Verdampfung, speziell $a_{\alpha,1}$, keinen Einfluss auf das 0. Moment bzw. die Anzahl der Tropfen hat. Für die Bestimmung der DQMOM-Quellterme $a_{\alpha,2}$, $b_{\alpha,2}$ und $\mathbf{c}_{\alpha,2}$ reicht die Betrachtung der

Momente alleine nicht aus (siehe Abschnitt 3.3.1). Daher werden zusätzliche Bedingungen vorgeschlagen, die eine Beschreibung der Verdampfung kontinuierlicher Verteilungsfunktionen ermöglichen. Diese Bedingungen lauten

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{w_\alpha}{w_{\alpha+1}} \right) = 0, \quad (3.45)$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{v_\alpha}{v_{\alpha+1}} \right) = 0 \quad (3.46)$$

und

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{u}_\alpha}{\mathbf{u}_{\alpha+1}} \right) = 0. \quad (3.47)$$

Diese Bedingungen werden als *Ratio Constraints* [22] bezeichnet. Werden zunächst wie für (3.37) die Momente für (3.38) betrachtet, wird auch diesmal mit ($l = m = n = p = 0$) die Anzahl, mit ($l = 1$ und $m = n = p = 0$) die Massen und mit ($l = m = 1$ und $n = p = 0$) der Impuls betrachtet und diese Werte in (3.38) eingesetzt. Daraus folgen die ersten Vorschriften zur Bestimmung der DQMOM-Quellterme $a_{\alpha,2}$, $b_{\alpha,2}$ und $c_{\alpha,2}$

$$\sum_{\alpha=1}^N a_{\alpha,2} = -\Psi, \quad (3.48)$$

$$\sum_{\alpha=1}^N b_{\alpha,2} = 0 \quad (3.49)$$

und

$$\sum_{\alpha=1}^N c_{\alpha,2} = 0. \quad (3.50)$$

Werden die *Ratio Constraints* verwendet, erhält man nach Umformungen die weiteren Vorschriften zur Bestimmung dieser DQMOM-Quellterme

$$\begin{aligned} w_{\alpha+1} a_{\alpha,2} - w_\alpha a_{\alpha+1,2} &= 0 \\ \text{mit } \alpha &= 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} w_{\alpha+1} v_{\alpha+1} b_{\alpha,2} - w_\alpha v_\alpha b_{\alpha+1,2} &= \\ w_\alpha w_{\alpha+1} [\nu_\alpha R_\nu(\nu_{\alpha+1}) - \nu_{\alpha+1} R_\nu(\nu_\alpha)] &= \\ \text{mit } \alpha &= 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3.52)$$

und

$$\begin{aligned}
 w_{\alpha+1} v_{\alpha+1} \mathbf{u}_{\alpha+1} \mathbf{c}_{\alpha,2} - w_{\alpha} v_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \mathbf{c}_{\alpha+1,2} = \\
 \mathbf{u}_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha+1} w_{\alpha} w_{\alpha+1} [\nu_{\alpha} R_{\nu}(\nu_{\alpha+1}) - \nu_{\alpha+1} R_{\nu}(\nu_{\alpha})] \\
 \text{mit } \alpha = 1, \dots, N-1.
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

Damit ergeben sich für $N = 3$ insgesamt 15 unbekannte Größen. Da bei Vorschrift (3.48) Ψ unbekannt ist, stehen nur 14 Gleichungen zur Verfügung. Die letzte Gleichung zur Bestimmung der unbekannten Größen wird aus Gleichung (3.51) unter Verwendung eines weiteren unabhängigen Moments (z. B. $l = 2$ und $m = n = p = 0$) bestimmt. Bevor dieses Moment verwendet werden kann, wird die Beziehung $a_{\alpha} = \beta w_{\alpha}$, die (3.51) erfüllt, in (3.38) eingesetzt. Um nun die Unbekannte β zu bestimmen, kann das weitere unabhängige Moment $l = 2$ und $m = n = p = 0$ eingesetzt werden und man erhält

$$\beta = \frac{2 \sum_{\alpha=1}^N v_{\alpha} b_{\alpha,2}}{\sum_{\alpha=1}^N v_{\alpha}^2 w_{\alpha}}. \tag{3.54}$$

Demnach kann β in Abhängigkeit von $b_{\alpha,2}$ bestimmt werden. Prinzipiell können auch andere unabhängige Momente zur Bestimmung von β verwendet werden. Allerdings kann dann β auch noch von $\mathbf{c}_{\alpha,2}$ abhängig sein. Hier wird die Beziehung (3.54) verwendet, da die Bestimmung von β einfach ist und in [22] gute Ergebnisse liefert. Die DQMOM-Quellterme a_{α} , b_{α} und \mathbf{c}_{α} ergeben sich dann aus (3.39)-(3.41).

Die DQMOM-Quellterme $a_{\alpha,2}$, $b_{\alpha,2}$ und $\mathbf{c}_{\alpha,2}$ bestimmen sich aus dem Verlust der Tropfen durch die Verdampfung. Diese Terme sorgen dafür, dass bei vollständiger Verdampfung die Abszissen bzw. die Durchmesser gleichzeitig verschwinden und dies beim 0. Moment berücksichtigt wird.

Berechnungsablauf

Die DQMOM-Quellterme $a_{\alpha,1}$, $b_{\alpha,1}$ und $\mathbf{c}_{\alpha,1}$ ergeben sich aus bekannten Größen über (3.42)-(3.44). Zur Bestimmung der DQMOM-Quellterme $a_{\alpha,2}$, $b_{\alpha,2}$ und $\mathbf{c}_{\alpha,2}$ wird zunächst $b_{\alpha,2}$ über (3.49) und (3.52) berechnet. Anschließend kann $a_{\alpha,2}$ über (3.54) und $a_{\alpha,2} = \beta w_{\alpha}$ bestimmt werden. $\mathbf{c}_{\alpha,2}$ wird über (3.50) und (3.53) ausgewertet. Mit $a_{\alpha,2}$ kann über (3.48) der Verlust an Tropfen Ψ berücksichtigt werden. Wird Ψ negativ (physikalisch nicht sinnvoll) wird der Beitrag der Verdampfung vernachlässigt und Ψ , $a_{\alpha,2}$, $b_{\alpha,2}$ und $\mathbf{c}_{\alpha,2}$ werden auf Null gesetzt.

3.3.3 Verdampfungsmodellierung

Einige Verdampfungsmodelle werden in Abramzon [2] und Sirignano [79] erläutert. Das Modell mit der geringsten Komplexität ist das D^2 -Gesetz. Es wurde ursprünglich von Godsave [25] und Spalding [82] formuliert. Dieses Modell wurde entwickelt für die Betrachtung eines isolierten Tropfens bestehend aus einer Komponente umgeben von einem ruhenden Gas. Dieses Modell wird als D^2 -Gesetz bezeichnet, da das Quadrat des Tropfendurchmessers d linear mit der Zeit sinkt

$$\frac{dd^2}{dt} = -E_v. \quad (3.55)$$

Für die Beschreibung von verdampfenden Sprays wird das Filmmodell (Abbildung 3.5) verwendet.

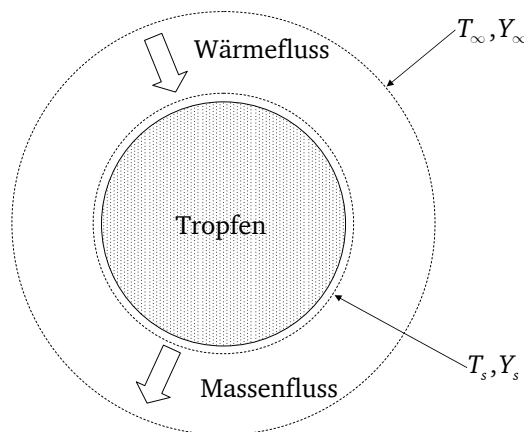


Abbildung 3.5.: Filmmodell Nernst 1904 [65]

Dieses Modell wird hier nur kurz erläutert, da Parameter, die zur Beschreibung der Verdampfung verwendet werden, auf diesem Modell basieren. Weitergehende Beschreibungen sind z. B. in [66] zu finden. Das Filmmodell basiert auf der Annahme, dass um den Tropfen eine ruhende Gasschicht existiert. Diese Gasschicht ist begrenzt durch zwei Flächen (Index s und Index ∞). Die s -Fläche liegt sehr nah an der Tropfenoberfläche. Zwischen Tropfenoberfläche und der s -Fläche findet der Phasenwechsel von flüssig zu gasförmig statt.

Eine wichtige Größe bei der Verdampfung ist die Massentransferrate (Massenstrom pro Fläche). Über die Massenbilanz und das erste Fick'sche Diffusionsgesetz kann für die Massentransferrate folgender Ausdruck gewonnen werden

$$\dot{m}'' = \frac{2\rho D_{12}}{d} \ln(1 + B_Y) . \quad (3.56)$$

In diesem Ausdruck ist d der Tropfendurchmesser, ρ die Dichte der Mischung der verdampften Flüssigkeit und dem umgebenden Gas und D_{12} der Diffusionskoeffizient von der verdampften Flüssigkeit in das umgebende Gas. B_Y ist Spaldings Massentransferkoeffizient und ist gegeben durch

$$B_Y = \frac{Y_\infty - Y_s}{Y_s - 1} . \quad (3.57)$$

Y_s ist der Massenbruch von der verdampften Flüssigkeit auf der s -Fläche und Y_∞ weit weg vom Tropfen. Aus der Energiebilanz erhält man für die Massentransferrate folgende Beziehung

$$\dot{m}'' = \frac{2\lambda}{c_p d} \ln(1 + B_T) , \quad (3.58)$$

wobei λ die Wärmeleitfähigkeit und c_p die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck ist. B_T ist Spaldings Wärmetransferkoeffizient und gegeben durch

$$B_T = \frac{c_p (T_\infty - T_s)}{\Delta h_v} . \quad (3.59)$$

Hierbei ist Δh_v die spezifische Verdampfungsenthalpie bei der Temperatur T_s . Über die Massentransferrate \dot{m}'' (3.56) oder (3.58) kann die Änderung des Tropfendurchmessers bestimmt werden, indem der Massentransfer bzw. die Massenänderung \dot{m} an der Tropfenoberfläche $A_s = \pi d^2$ bestimmt wird. Es folgt

$$\dot{m}'' = -\frac{\dot{m}}{A_s} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\rho_l \frac{\pi}{6} d^3 \right)}{\pi d^2} , \quad (3.60)$$

wobei ρ_l die Dichte der Tropfenflüssigkeit ist. Wird in dieser Gleichung der Massentransferkoeffizient (3.57) oder der Wärmetransferkoeffizient (3.59) eingesetzt und so umgeformt, dass die Form (3.55) erhalten wird, folgt

$$\frac{dd^2}{dt} = -E_v = -\frac{8\rho D_{12}}{\rho_l} \ln(1 + B_Y) \quad (3.61)$$

und

$$\frac{dd^2}{dt} = -E_v = -\frac{8\lambda}{c_p \rho_l} \ln(1 + B_T) . \quad (3.62)$$

Zur Bestimmung des Tropfendurchmessers kann (3.61) oder (3.62) integriert werden. Mit der Randbedingung $d(t=0) = d_0$ folgt

$$d^2(t) = d_0^2 - E_v t . \quad (3.63)$$

Das D^2 -Gesetz beinhaltet die Annahme, dass die Lewiszahl $Le = 1$ ist [2, 89]. Die Lewiszahl ist definiert über

$$Le = \frac{\lambda}{\rho D c_p} . \quad (3.64)$$

Die Lewiszahl setzt die Wärmeleitung ins Verhältnis zur Diffusion. Ist die Lewiszahl $Le = 1$ wird $\rho D = \frac{\lambda}{c_p}$. Zusammen mit den Formeln (3.56) und (3.58) führt das zu

$$B_Y = B_T = B . \quad (3.65)$$

Für die Bestimmung der Verdampfungskonstanten E_v fehlen noch Werte der Eigenschaften D_{12} , ρ oder c_p und λ zwischen der s-Fläche und der ∞ -Fläche. Um diese Eigenschaften zu bestimmen, werden Referenzgrößen (T_{ref} und Y_{ref}) benötigt. Gute Näherungswerte für die Referenzgrößen werden über das $\frac{1}{3}$ -Gesetz von Hubbard [34] bestimmt.

$$\begin{aligned} T_{ref} &= T_s + \frac{1}{3} (T_\infty - T_s) , \\ Y_{ref} &= Y_s + \frac{1}{3} (Y_\infty - Y_s) . \end{aligned} \quad (3.66)$$

Mit den Referenzgrößen können Werte für D_{12} , ρ , c_p und λ aus Tabellen [88] gefunden werden.

Sättigung

Verdampft eine Flüssigkeit, kann durch Sättigung der Verdampfungsprozess zum Erliegen kommen. Verdampft in einem leeren Volumen δV ein einkomponentiger flüssiger Stoff, dann entsteht durch den Phasenwechsel ein Gas und der Druck im Volumen δV steigt. Der flüssige Stoff wird so lange verdampfen, bis der Druck im Volumen δV so groß ist, dass der bereits verdampfte Stoff wieder kondensiert. An diesem Punkt ist ein Gleichgewicht zwischen Verdampfung und Kondensation erreicht und der herrschende Druck wird als Sättigungsdruck bezeichnet. Sättigung kann durch das verwendete Verdampfungsgesetz und die damit getroffenen Annahmen nicht vollständig abgebildet werden. Eine Möglichkeit die Sättigung zu modellieren besteht darin, das D^2 -Gesetz zu erweitern und die verdampfte Masse zu berücksichtigen. Dafür wird ein Massenbruch

Y verwendet und die Bilanzierung des Massenbruchs führt zu folgender Transportgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho Y) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho Y u_i) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho D_{12} \frac{\partial}{\partial x_i} (Y) \right) = K_v, \quad (3.67)$$

wobei D_{12} der Diffusionskoeffizient und der Quellterm K_v für die verdampfte Masse steht. Mit der Information des Massenbruchs am Ort x zum Zeitpunkt t wird die Verdampfungskonstante in Abhängigkeit des Massenbruchs $Y(x, t)$ bestimmt. Zunächst wird über Formel (3.57) der Massentransferkoeffizient $B_Y(x, t)$ bestimmt und anschließend die Verdampfungskonstante E_v nach Formel (3.61) oder (3.62). Erreicht der Massenbruch Y den gesättigten Massenbruch Y_s , wird der Massentransferkoeffizient $B_Y = 0$ und es folgt, dass keine weitere Masse verdampfen kann.

3.4 Die Kopplung der DQMOM mit der Multi-Fluid-Methode

In den Arbeiten von Madsen [52, 53] und Friedrich [24] wurde bereits eine Kopplung der DQMOM mit der Multi-Fluid-Methode verwendet. Aus der Williams-Spray-Gleichung und der approximierten Verteilungsfunktion $f(v, u)$ ergeben sich die DQMOM-Transportgleichungen (3.32)-(3.34) mit den DQMOM-Quelltermen (3.39)-(3.41). Damit die DQMOM-Quellterme in den Gleichungen der Multi-Fluid-Methode (Abschnitt 2.5) verwendet werden können, müssen die Größen der DQMOM (Quadratur-Variablen) mit den Größen der Multi-Fluid-Methode (Volumenanteil) kompatibel gemacht werden. Das bedeutet, dass die DQMOM-Transportgleichungen durch die Multi-Fluid-Gleichungen ersetzbar sein müssen und die DQMOM-Quellterme kompatibel sind. Der Volumenanteil α_n kann über folgende Beziehung ausgedrückt werden (vgl. 2.5)

$$\alpha_n = \frac{w_n v_n}{v_0}, \quad (3.68)$$

wobei v_0 ein betrachtetes Volumen ist. Da in der Multi-Fluid-Methode jede disperse Phase über Massen- und Impulsbilanz bestimmt ist, fehlt eine Gleichung, um die drei DQMOM-Transportgleichungen zu ersetzen. In den DQMOM-Transportgleichungen werden folgende Größen transportiert:

- Wichtung w_n
- Masse $\rho_d w_n v_n$
- Impuls $\rho_d w_n v_n u_n$.

Da für Masse und Impuls Bilanzgleichungen in der Multi-Fluid-Methode existieren, muss für die Wichtung eine zusätzliche Bilanzgleichung verwendet werden. Wird die Beziehung (3.68) verwendet, ergeben sich folgende Gleichungen für die Kopplung der Methoden

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\alpha_n}{\nu_n} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\alpha_n}{\nu_n} u_{i,n} \right) = a_{n,MF}, \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_d \alpha_n) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho_d \alpha_n u_{i,n}) = \rho_d b_{n,MF} \quad (3.70)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_d \alpha_n u_{i,n}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_d \alpha_n u_{i,n} u_{j,n}) = \rho_d c_{n,MF}. \quad (3.71)$$

Durch das Ersetzen der DQMOM-Transportgleichungen durch die Gleichungen (3.69)-(3.71) sind die ursprünglichen Quadratur-Variablen (w_n und ν_n) nicht mehr vollständig vorhanden. Ebenfalls unterscheiden sich die ursprünglichen DQMOM-Quellterme (3.39)-(3.41) von denen in den Gleichungen (3.69)-(3.71). Um die DQMOM-Quellterme $a_{n,MF}$, $b_{n,MF}$ und $c_{n,MF}$ zu bestimmen, können die Vorschriften in Abschnitt 3.3.2 verwendet werden. Allerdings müssen die nicht mehr vorhandenen Größen (w_n) durch das Tropfenvolumen ν_n und den Volumenanteil α_n ersetzt werden. Für die Bestimmung des Quellterms $b_{n,2,MF}$ nach (3.52) ergibt sich z. B. die neue Vorschrift unter Verwendung des Volumenanteils α_n zu

$$\alpha_{n+1} b_{n,2,MF} - \alpha_n b_{n+1,2,MF} = \frac{\alpha_n \alpha_{n+1}}{\nu_n \nu_{n+1}} [\nu_n R_\nu(\nu_{n+1}) - \nu_{n+1} R_\nu(\nu_n)] \quad (3.72)$$

mit $n = 1, \dots, N - 1$.

Die weiteren Quellterme können ebenfalls mit den Größen der Multi-Fluid-Methode (ν_n und α_n) bestimmt werden. Wird bei der Verdampfung die Sättigung berücksichtigt, wird der Massenbruch Y der verdampften Masse bilanziert. Die Erhöhung des Massenbruchs durch die Verdampfung kann ebenfalls über die DQMOM-Quellterme dargestellt werden, da in $b_{n,MF}$ die Information der verdampften Masse steckt. Die Bilanzgleichung des Massenbruchs der verdampften Masse ergibt sich zu

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_c Y) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho_c Y u_i) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho_c D_{12} \frac{\partial}{\partial x_i} (Y) \right) = \frac{\rho_d \rho_c}{\rho_c \alpha_c + \rho_d \alpha_d} \sum_{n=1}^N b_{n,MF}. \quad (3.73)$$

α_d steht hier für den gesamten Volumenanteil der dispersen Phase.

3.5 Zusammenfassung

Verteilungsfunktionen

In diesem Kapitel wurden die verwendeten kontinuierlichen Verteilungsfunktionen vorgestellt.

- Normalverteilung
- Logarithmische Normalverteilung

Eine Approximation der Verteilungsfunktion wurde mit dem PD-Algorithmus bestimmt. Über die so erhaltenen Quadratur-Variablen (w_α und $\langle d \rangle_\alpha$) kann die ursprüngliche Verteilungsfunktion $f(d)$ und deren Momente m_n über folgenden Formeln rekonstruiert werden

$$f(d) \cong \tilde{f}(d) = \sum_{\alpha=1}^N w_\alpha \delta [d - \langle d \rangle_\alpha] \quad \text{und} \quad (3.74)$$

$$m_n \cong \tilde{m}_n = \sum_{\alpha=1}^N w_\alpha \langle d \rangle_\alpha^n. \quad (3.75)$$

Die Quadratur-Variablen werden als Anfangsbedingungen der DQMOM-Transportgleichungen verwendet.

DQMOM

Die DQMOM beschreibt die Entwicklung einer Verteilungsfunktion über den Transport der Quadratur-Variablen. Effekte wie z. B. die Verdampfung werden über die DQMOM-Quellterme berücksichtigt. Es wurde gezeigt, dass durch die Erweiterung von Fox und den *Ratio Constraints* die DQMOM in der Lage ist, vollständige Verdampfung darzustellen. Zusammengefasst setzt sich die DQMOM zum einen aus den DQMOM-Transportgleichungen

$$\frac{\partial w_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_\alpha u_{i,\alpha}) = a_\alpha, \quad (3.76)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho w_\alpha v_\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho w_\alpha v_\alpha u_{i,\alpha}) = \rho b_\alpha \quad (3.77)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho w_\alpha v_\alpha u_{i,\alpha}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho w_\alpha u_{i,\alpha} u_{j,\alpha}) = \rho c_\alpha \quad (3.78)$$

und der Gleichung für die Bestimmung der DQMOM-Quellterme zusammen

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha=1}^N (1-l) v_{\alpha}^l u_{1,\alpha}^m u_{2,\alpha}^n u_{3,\alpha}^p a_{\alpha,1} \\
& + \sum_{\alpha=1}^N (l-m-n-p) v_{\alpha}^{l-1} u_{1,\alpha}^m u_{2,\alpha}^n u_{3,\alpha}^p b_{\alpha,1} \\
& + \sum_{\alpha=1}^N v_{\alpha}^{l-1} u_{1,\alpha}^m u_{2,\alpha}^n u_{3,\alpha}^p \left(m u_{1,\alpha}^{-1} c_{1,\alpha,1} + n u_{2,\alpha}^{-1} c_{2,\alpha,1} + p u_{3,\alpha}^{-1} c_{3,\alpha,1} \right) \\
& = \sum_{\alpha=1}^N l w_{\alpha} v_{\alpha}^{l-1} u_{1,\alpha}^m u_{2,\alpha}^n u_{3,\alpha}^p R_{\nu}(v_{\alpha}) + \delta_{l0} \Psi(t) u_{1,c}^m u_{2,c}^n u_{3,c}^p.
\end{aligned} \tag{3.79}$$

Die einzelnen Berechnungsvorschriften für die DQMOM-Quellterme sind in Abschnitt 3.3.2 aufgeführt.

Verdampfung

Das in dieser Arbeit verwendete Verdampfungsmodell basiert auf dem D^2 -Gesetz. Die getroffenen Annahmen sind:

- keine Relativgeschwindigkeit zwischen Gas und Tropfen
- sphärische Tropfen
- isobarer Prozess
- konstante Transporteigenschaften des Gases
- einkomponentiger flüssiger Stoff
- konstante Tropfen- und Umgebungstemperatur
- Sättigungsdampfdruck an der s-Fläche
- $Le = 1$.

Durch die Berücksichtigung der verdampften Masse, kann über dieses Verdampfungsmodell der Sättigungseffekt abgebildet werden.

Kopplung der DQMOM mit der Multi-Fluid-Methode

Es wurde gezeigt, dass die DQMOM mit der Multi-Fluid-Methode gekoppelt werden kann. Für die Kopplung müssen folgende Punkte beachtet werden:

- DQMOM-Quellterme an die Multi-Fluid-Gleichungen anpassen

-
- zusätzliche Transportgleichung für die Wichtung.

Durch die Kopplung kann nun mit der Multi-Fluid-Methode eine kontinuierliche Verteilungsfunktion über $N = 3$ disperse Multi-Fluid-Phasen abgebildet werden. Mit der Multi-Fluid-Methode werden die Widerstandskräfte und die Gravitation abgebildet. Die DQMOM berücksichtigt die Verdampfung. Für die kontinuierliche Phase werden Bilanzgleichungen für Masse und Impuls gelöst. Für die disperse Phase werden drei Bilanzgleichungen für die Masse und drei Bilanzgleichungen für den Impuls verwendet, da $N = 3$ gewählt wurde. Wird die Sättigung berücksichtigt, wird eine weitere Gleichung gelöst. Zur Bestimmung der DQMOM-Quellterme werden in Abhängigkeit der betrachteten Geschwindigkeitsrichtungen minimal drei 3×3 und maximal fünf 3×3 lineare Gleichungssysteme gelöst.

4 Die Numerik

In den vorangegangenen Kapiteln wurden die Methoden und Modelle zur Beschreibung von Mehrphasenströmungen vorgestellt. Für einfache Probleme besteht die Möglichkeit analytische Lösungen zu bestimmen. In technischen Umgebungen führt die Beschreibung in der Regel zu Systemen von gekoppelten Differentialgleichungen, die nicht mehr analytisch lösbar sind. Daher werden zur Lösung solcher Strömungsprobleme numerische Methoden verwendet. In diesem Kapitel werden die verwendeten numerischen Methoden und die Implementierung der Methoden von dispersen Mehrphasenströmungen erläutert. Als Basis für die Implementierung der Methoden aus den Kapiteln 2 und 3 dient der Strömungslöser Precise-Unstructured. Dieser Code basiert auf Dolfyn [44, 45] und wurde von Rolls-Royce weiterentwickelt und parallelisiert. Precise-Unstructured ist ein inkompressibler und unstrukturierter Code, der zur Diskretisierung auf Finite-Volumen-Methoden (FVM) zurückgreift.

4.1 Finite-Volumen-Methoden

Zur Anwendung der FVM wird das Problemgebiet in eine endliche Anzahl an Kontrollvolumina (KV) aufgeteilt (numerisches Gitter). In Abbildung 4.1 ist als Beispiel ein Teil eines numerischen Gitters zu sehen. Im Zentrum jedes Kontrollvolumens liegt der Rechenpunkt, in dem die Variablen (Knotenwerte) bestimmt werden. Die FVM basiert auf der Integralform einer Bilanzgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \phi \, dV + \int_S \rho \phi \mathbf{u} \mathbf{n} \, dS = \int_S \rho D \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \, dS + \int_V q_\phi \, dV. \quad (4.1)$$

ϕ ist die bilanzierte Größe, V das Volumen, S die Fläche und \mathbf{n} der Normalenvektor. Diese Gleichung gilt für das gesamte Problemgebiet und auch für jedes KV. Ein großer Vorteil der FVM ist die Konservativität. Summiert man alle Gleichungen der einzelnen KV, heben sich die Gleichungen im Problemgebiet auf und die geforderte Konservativität ist gewährleistet. Die Volumenintegrale in (4.1) stehen für die zeitliche Änderung und die Quellen. Die Oberflächenintegrale in (4.1) stehen für den konvektiven und diffusiven Fluss. Der gesamte konvektive Fluss durch jedes KV ergibt sich aus der Summe

der einzelnen konvektiven Flüsse durch alle Flächen S_c eines KV's. Ebenfalls gilt dies für die diffusiven Flüsse. Für die Oberflächenintegrale erhält man

$$\begin{aligned}\int_S \rho \phi \mathbf{u} \mathbf{n} dS &= \sum_c \int_{S_c} \rho \phi \mathbf{u} \mathbf{n} dS_c \\ \int_S \rho D \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} dS &= \sum_c \int_{S_c} \rho D \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} dS_c.\end{aligned}\quad (4.2)$$

Eine exakte Lösung der Integrale erfordert die Kenntnis, dass der Integrand auf der kompletten Fläche bzw. Volumen jedes KV's bekannt ist. Da aber nur die Knotenwerte bekannt sind, werden die Integrale über die Mittelpunktsregel approximiert. Die Volumenintegrale, beispielsweise das Integral des Quellterms in (4.1), werden über den Mittelwert der zu integrierenden Größe (hier: q_ϕ) bestimmt. Der Mittelwert von q_ϕ liegt im Schwerpunkt eines Kontrollvolumens und ist der Knotenwert $q_{\phi,P}$ am Punkt P . Für das Volumenintegral ergibt die Approximation dann

$$Q_{\phi,P} = \int_{V_P} q_{\phi,P} dV \cong q_{\phi,P} \delta V_P. \quad (4.3)$$

Für die Approximation der Oberflächenintegrale wird der Wert des Integranden am Schwerpunkt jeder Fläche S_c bestimmt. Wenn g der Integrand ist und g_c der Mittelwert auf der Fläche S_c , dann gilt für die Approximation des Oberflächenintegrals

$$G_c = \int_{S_c} g dS_c \cong g_c S_c. \quad (4.4)$$

Im Gegensatz zu den Volumenintegralen sind bei den Oberflächenintegralen die Mittelwerte des Integranden nicht bekannt und werden daher über die Knotenwerte interpoliert. Für die allgemeine Bilanzgleichung ergibt sich dann

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_P \phi_P \delta V_P + \sum_c \rho_c \phi_c \mathbf{u}_c \mathbf{n}_c S_c = \sum_c \rho_c D_c \frac{\partial \phi_c}{\partial \mathbf{x}} S_c + q_{P,\phi} \delta V_P. \quad (4.5)$$

Die Interpolation der Flächenwerte über die Knotenwerte ergeben eine algebraische Gleichung $\mathbf{A}_\phi \boldsymbol{\phi} = \mathbf{b}_\phi$, in denen die Knotenwerte des betrachteten und der des Nachbarkontrollvolumens enthalten sind.

4.1.1 Diskretisierung konvektiver Flüsse

Unter der Annahme, dass der Massenfluss \dot{m}_f durch die Fläche S_f bekannt ist, muss für die Approximation der Oberflächenintegrale des konvektiven Flusses der Flächenwert

ϕ_f am Punkt f aus den Knotenwerten bestimmt werden. Zur Veranschaulichung ist in Abbildung 4.1 ein Ausschnitt aus einem numerischen Gitter zu sehen.

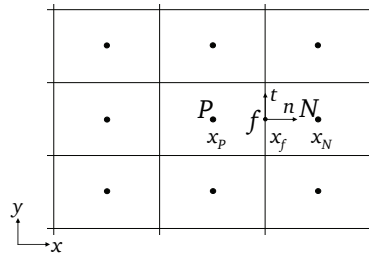


Abbildung 4.1.: Ausschnitt aus einem numerischen Gitter (2D)

Für die Bestimmung des Flächenwertes ϕ_f am Ort f werden folgende Methoden verwendet.

Interpolation 1. Fehlerordnung

Eine einfache Methode ϕ_f zu bestimmen, ist die Aufwind-Interpolation (UD). Am Schwerpunkt der Fläche S_f wird der Massenfluss \dot{m}_f betrachtet und in Abhängigkeit der Richtung des Massenflusses \dot{m}_f wird entweder der Knotenwert P oder der Knotenwert N auf f interpoliert. Die Vorschrift lautet

$$\begin{aligned} \phi_f &= \phi_P, & \text{falls } \dot{m}_f > 0 \text{ und} \\ \phi_f &= \phi_N, & \text{falls } \dot{m}_f < 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Der Vorteil dieses Verfahrens liegt in der bedingungslosen Beschränktheit und der Abwesenheit von Oszillationen. Allerdings kann über eine Taylorreihenentwicklung um den Punkt P gezeigt werden, dass der Fehler von 1. Ordnung ist. Der dominierende Fehlerterm beinhaltet die erste Ableitung und kann daher als numerische Diffusion interpretiert werden. Hier können feinere numerische Gitter diesen Fehler minimieren.

Interpolation 2. Fehlerordnung

Ein weiteres Verfahren zur Bestimmung von ϕ_f verwendet die Knotenwerte der KV P und N . Haben die Knotenpunkte P und N den gleichen Abstand zum Punkt f folgt für ϕ_f

$$\phi_f = 0.5\phi_P + 0.5\phi_N. \quad (4.7)$$

Da nicht nur äquidistante Gitter verwendet werden, kann sich der Abstand zum Punkt f unterscheiden. Zur Berücksichtigung der unterschiedlichen Abstände wird ein Interpolationsfaktor β verwendet

$$\beta = \frac{x_f - x_P}{x_N - x_f}. \quad (4.8)$$

Für die Vorschrift zur Bestimmung des Wertes ϕ_f ergibt sich

$$\phi_f = (1 - \beta) \phi_P + \beta \phi_N. \quad (4.9)$$

Dieses Verfahren wird als Zentraldifferenz-Interpolation (auch CD) bezeichnet. Eine Taylorreihenentwicklung um den Punkt P zeigt, dass bei orthogonalen Gittern der Fehler von 2. Ordnung ist und eine Abhängigkeit vom Gitterabstand besteht. Ein Nachteil der CD-Interpolation ist, dass die Lösungen oszillieren können.

Blending und verzögerte Korrektur

Die Idee der Blending-Technik ist die Kombination der unterschiedlichen Interpolationsverfahren. Dadurch kann die Stabilität der UD-Interpolation und die Genauigkeit der CD-Interpolation gemischt werden. Um den Wert ϕ_f^{blend} zu erhalten, wird zum einen der UD-interpolierte Wert ϕ_f^{UD} und zum anderen der CD-interpolierte Wert ϕ_f^{CD} kombiniert

$$\phi_f^{blend} = (1 - \gamma) \phi_f^{UD} + \gamma \phi_f^{CD}. \quad (4.10)$$

Für den Blendingfaktor $\gamma = 0$ erhält man die UD-Interpolation und für $\gamma = 1$ die CD-Interpolation. Demnach kann über γ bestimmt werden zu welchem Anteil das jeweilige Interpolationsverfahren zur Bestimmung von ϕ_f^{blend} beiträgt. Ein weiterer Vorteil, der sich aus dem Blending ergibt, ist die Möglichkeit ϕ_f^{blend} in einen impliziten und expliziten Teil aufzuteilen

$$\phi_f^{blend} = \phi_f^{UD} + \gamma \left(\phi_f^{CD} - \phi_f^{UD} \right) = A_{\phi,f}^{impl.} + b_{\phi,f}^{expl.}. \quad (4.11)$$

Der implizite Teil trägt zur Systemmatrix A_ϕ bei und wird daher mit dem noch unbekannten Wert bestimmt. Der explizite Teil trägt zum Quellterm b_ϕ bei und wird aus den bereits bekannten Werten ermittelt. Dadurch wird der Beitrag aus der CD-Interpolation, der Instabilitäten verursachen kann, keinen Einfluss auf die Systemmatrix A_ϕ haben. Diese Behandlung wird auch als verzögerte Korrektur bezeichnet [20].

4.1.2 Diskretisierung diffusiver Flüsse

Für die Diskretisierung der diffusiven Flüsse muss die Ableitung bekannt sein. Die Ableitung von ϕ an den Knotenpunkten wird über das Gauß-Verfahren bestimmt. Dabei wird die Ableitung am Knotenpunkt über den Mittelwert approximiert und anschließend über das Gauß-Theorem in ein Oberflächenintegral transformiert. Für die Ableitung am Knotenpunkt ergibt sich dann

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)_P \cong \frac{\sum_c \phi_c S_c}{\Delta V_P}. \quad (4.12)$$

Die Ableitung auf der Fläche S_f wird über die Mittelpunktsregel (4.9) bestimmt

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)_{f,H} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)_P (1 - \beta) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)_N \beta. \quad (4.13)$$

Diese Approximation ist von 2. Ordnung. In [20] ist gezeigt, dass die Verwendung dieser Approximation zu Oszillationen führen kann. Zur Vermeidung der Oszillationen kann auch für die Bestimmung des diffusiven Flusses die verzögerte Korrektur verwendet werden. Für den impliziten Teil des diffusiven Flusses wird folgende Approximation der Ableitung verwendet

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)_{f,impl} = \frac{\phi_N - \phi_P}{x_N - x_P}. \quad (4.14)$$

Die Ableitung auf der Fläche S_f über (4.13) wird für den expliziten Teil des diffusiven Flusses verwendet. Die verzögerte Korrektur ergibt dann für den diffusiven Fluss $F_{d,f}$ durch die Fläche S_f

$$F_{d,f} = \rho D S_f \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)_{f,impl} + \rho D S_f \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)_{f,H} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)_{f,impl} \right]. \quad (4.15)$$

Der erste Term auf der rechten Seite wird implizit behandelt und in der Systemmatrix berücksichtigt. Der zweite Term in den eckigen Klammern wird aus den bereits bekannten Werten ϕ bestimmt und wird explizit als Quellterm behandelt.

4.1.3 Diskretisierung der zeitlichen Ableitung

Zur Simulation von instationären Problemen können explizite sowie implizite Verfahren verwendet werden. Bei expliziten Verfahren wird der Wert ϕ^{n+1} über bereits bekannte

Größen zum Zeitpunkt t_n bestimmt. Bei impliziten Verfahren ist ϕ^{n+1} abhängig von Werten zum Zeitpunkt t_n und t_{n+1} und es muss ein Gleichungssystem zur Bestimmung von ϕ^{n+1} gelöst werden. Für explizite Verfahren ergibt sich ein geringerer Aufwand als bei impliziten Methoden. Jedoch ist durch explizite Verfahren die Informationsausbreitung stark eingeschränkt, was bei impliziten Verfahren durch die Kopplung der Variablen nicht der Fall ist. Dadurch unterliegen explizite Verfahren einer stärkeren Einschränkung in der Wahl der Zeitschrittweite Δt , um Stabilität zu gewährleisten [73]. Für diese Arbeit werden daher implizite Verfahren verwendet. Die Diskretisierungsvorschrift mit der Zeitschrittweite Δt für das implizite Euler-Verfahren ergibt sich zu

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t}. \quad (4.16)$$

Dieses Verfahren zählt zu den Einschnittverfahren, da nur eine bekannte Zeitebene t_n zur Bestimmung der neuen Zeitebene t_{n+1} verwendet wird. Ein Nachteil dieser Methode ist der Abbruchfehler 1. Ordnung, jedoch ist dieses Verfahren sehr stabil. Das Drei-Ebenen-Verfahren ist ein Mehrschrittverfahren und verwendet zur Bestimmung der neuen Zeitebene Δt_{n+1} zwei Zeitebenen Δt_{n-1} und Δt_n . Dadurch ergibt sich ein Abbruchfehler 2. Ordnung und die Vorschrift lautet:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{3\phi^{n+1} - 4\phi^n + \phi^{n-1}}{2\Delta t}. \quad (4.17)$$

4.1.4 Druckkorrektur

Die Problematik bei der Berechnung inkompressibler Strömungen ist, dass der Druck nur in den Impulsbilanzen auftaucht. Zur Lösung dieses Problems wird das SIMPLE-Druckkorrekturverfahren (Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations) verwendet, welches für die Einhaltung der Impulsbilanz und der Massenbilanz sorgt. Über folgende Betrachtung kann die Druckkorrekturgleichung bestimmt werden. Wird zunächst der Impuls mit dem vorläufigen Druck p^* bilanziert, erfüllen diese Geschwindigkeiten u_i^* in der Regel nicht die Massenbilanz. Es ergibt sich ein Massendefekt q_m . Werden nun Korrekturgrößen eingeführt

$$\begin{aligned} u'_i &= u_i^{k+1} - u_i^* \quad \text{und} \\ p' &= p^{k+1} - p^*, \end{aligned} \quad (4.18)$$

kann man mit den diskretisierten Impulsbilanzen und der diskretisierten Massenbilanz ein Gleichungssystem für die korrigierten Drücke p' in Abhängigkeit des Massendefekts q_m bestimmen

$$A_p p' = \sum_c A_{p,c} p'_c + q_m. \quad (4.19)$$

Zusätzlich erhält man einen Ausdruck zur Bestimmung der korrigierten Geschwindigkeiten u'_i aus den korrigierten Drücken p' . Durch Lösen der Druckkorrektur (4.19) können der neue Druck p^{k+1} und die neuen Geschwindigkeiten u_i^{k+1} bestimmt werden. Da in der Regel die neuen Geschwindigkeiten die Impulsbilanzen nicht erfüllen, wird dieser Ablauf so oft wiederholt, bis die Impulsbilanzen und die Massenbilanz gleichzeitig erfüllt sind. Die Herleitung der Druckkorrekturgleichung ist zum Beispiel in [20] oder in [73] zu finden. Zur Berücksichtigung der Verdampfung muss man den Quellterm der verdampften Masse q_v in der Druckkorrektur berücksichtigen. Es folgt für die Druckkorrekturgleichung

$$A_p p' = \sum_c A_{p,c} p'_c + q_m + q_v. \quad (4.20)$$

4.1.5 Unregelmäßige numerische Gitter

Die vorangegangenen Ausführungen wurden für ein kartesisches numerisches Gitter betrachtet. Da in industriellen Anwendungen auch komplexere Geometrien bzw. Strömungsgebiete existieren, ist es nicht mehr möglich dieses Gebiet durch ein kartesisches numerisches Gitter abzubilden. In dieser Arbeit wurden für numerische Gitter nur hexagonale KV verwendet. Bei komplexeren Geometrien kann dies zu folgenden Unregelmäßigkeiten führen.

Nicht-Orthogonalität

In Abbildung 4.2 ist ein zweidimensionales Gitter zu sehen. Der Unterschied zwischen einem kartesischen und nichtorthogonalen Gitter besteht darin, dass der Normalenvektor n_f der Fläche S_f nicht entlang einer kartesischen Richtung zeigt.

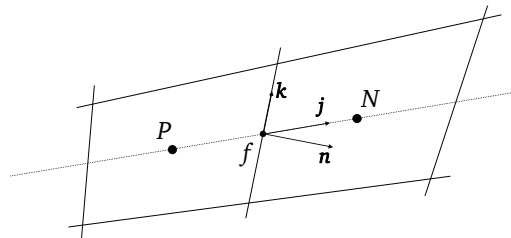


Abbildung 4.2.: Ausschnitt aus einem nichtorthogonalen numerischen Gitter (2D)

Für die Bestimmung des konvektiven Flusses muss darauf geachtet werden, dass durch die nichtorthogonalen Gitter die Oberflächenvektoren Komponenten in mehreren kar-

tesischen Richtungen haben und dass alle Geschwindigkeitskomponenten zum Massenfluss beitragen. Daher muss der Massenfluss in die kartesischen Komponenten aufgeteilt werden. Dafür wird die Fläche S_f auf die kartesische Koordinatenebene projiziert und mit der entsprechenden Geschwindigkeitskomponente multipliziert.

$$\dot{m}_{i,f} = \rho u_{i,f} S_{i,f}, \quad (4.21)$$

wobei $u_{i,f}$ die Geschwindigkeit in Richtung i am Punkt f und $S_{i,f}$ die Flächen, die sich durch eine Projektion auf die kartesischen Koordinatenebenen ergeben. Für den diffusiven Fluss durch die Fläche S_f ergibt sich mit verzögerter Korrektur (4.15) bei nichtorthogonalen Gittern folgender Ausdruck

$$F_{d,f} = \rho D S_f \left(\frac{\partial \phi}{\partial j} \right)_{f,impl} + \rho D S_f \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{f,H} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial j} \right)_{f,impl} \right]. \quad (4.22)$$

Der zweite Term auf der rechten Seite beinhaltet dann die Differenz zwischen den Ableitungen in j und n -Richtung. Ein Unterschied zwischen (4.15) und (4.22) liegt darin, dass für die beiden Ableitungen im zweiten Term auf der rechten Seite die gleiche Approximation verwendet wird. Dies sorgt dafür, dass sich auf orthogonalen Gittern die beiden Ableitungen aufheben.

Schiefheit

In Abbildung 4.3 ist ein Ausschnitt eines schiefen Gitters gezeigt. Wird eine beliebige Größe ϕ auf die Fläche S_f interpoliert, wird ϕ_f nicht auf den Punkt f interpoliert, sondern auf den Punkt f^* .

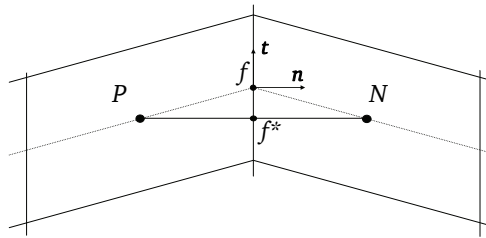


Abbildung 4.3.: Ausschnitt aus einem schiefen numerischen Gitter (2D)

Um solche Fehler zu minimieren, sollte man bereits bei der Gittergenerierung darauf achten. Da schiefe Gitterzellen nicht immer vermeidbar sind, kann über folgenden Ausdruck mit dem Ort \mathbf{r} der Rechenpunkte der Fehler klein gehalten werden

$$\phi_f \cong \phi_P + (\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_P) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)_P. \quad (4.23)$$

4.2 Implementierung

In diesem Abschnitt wird die Implementierung der Multi-Fluid-Methode und der DQ-MOM erläutert. Dabei werden Routinen, die bereits in Precise-Unstructured enthalten sind, angepasst und erweitert. Neben der Implementierung der zu lösenden Gleichungen und Modelle, mussten einige Routinen implementiert werden, damit die Bestimmung von mehreren Phasen in Precise-Unstructured möglich ist und gleichzeitig die Funktionalität des ursprünglichen Codes erhalten bleibt. In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Aspekte dieser Routinen erläutert.

4.2.1 Multi-Fluid-Methode

Für die Multi-Fluid-Methode werden neben der kontinuierlichen Phase drei zusätzliche disperse Phasen implementiert. Für die zusätzlichen Phasen müssen jeweils Impulsbilanzen in die drei kartesischen Koordinatenrichtungen und eine Massenbilanz in Form einer Transportgleichung des Volumenanteils $\alpha_{d,n}$ implementiert werden. Aus der Bedingung

$$\alpha_c + \sum_n \alpha_{d,n} = 1 \quad (4.24)$$

wird der Volumenanteil α_c der kontinuierlichen Phase bestimmt und findet Berücksichtigung bei der Bilanzierung der Masse der kontinuierlichen Phase. Mit $\alpha_{d,n}$ werden die Massenflüsse der jeweiligen dispersen Phasen bestimmt.

Massenbilanz

Für die Massenbilanz der dispersen Phasen wird jeweils eine Transportgleichung für den Volumenanteil α_d implementiert. Dazu wird die bestehende Routine für einen transportierten Skalar angepasst. Die Randbedingungen für den Volumenanteiltransport bleiben unverändert. Allerdings muss der diffusive Term vernachlässigt werden. Der konvektive Term muss im Kontext der Multi-Fluid-Methode gesondert behandelt werden, da die Divergenz der Geschwindigkeit nicht vernachlässigbar ist. Für die einphasige Massenbilanz ergibt eine Umformung bei konstanter Dichte für die Divergenz

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (4.25)$$

Bei den Massenbilanzen aus der Multi-Fluid-Methode ergibt eine Umformung ohne Massentransfer und bei konstanter Dichte

$$\alpha_q \frac{\partial u_{i,q}}{\partial x_i} = - \left(\frac{\partial \alpha_q}{\partial t} + \frac{\partial u_{i,q}}{\partial x_i} \right). \quad (4.26)$$

Daher kann hier die Divergenz der Geschwindigkeit nicht vernachlässigt werden und der konvektive Term für den Volumenanteiltransport der dispersen Phasen wird aufgeteilt

$$\rho \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_d u_{i,d,n}) = \rho u_{i,d,n} \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_{d,n}) + \rho \alpha_{d,n} \frac{\partial}{\partial x_i} (u_{i,d,n}) . \quad (4.27)$$

Der erste Term auf der rechten Seite entspricht dem konvektiven Term eines transportierten Skalars und wird über die bestehende Routine des konvektiven Flusses behandelt. Der zweite Term auf der rechten Seite enthält die Divergenz der Geschwindigkeit und sorgt für die Massenkonservativität der dispersen Phase und wird explizit als Quellterm behandelt. Der Massentransfer durch Verdampfung wird über die DQMOM-Quellterme berücksichtigt. Nach Lösen des Gleichungssystems für die Volumenanteile werden die Massenflüsse mit den neuen Werten für die Volumenanteile berechnet.

Impulsbilanz

Die Impulsbilanzen der kontinuierlichen Phase bei der Multi-Fluid-Methode unterscheiden sich von den Impulsbilanzen in einphasigen Strömungen dadurch, dass die Divergenz der Geschwindigkeit nicht vernachlässigt werden kann (siehe Abschnitt 4.2.1). Dadurch ergeben sich Terme, die in den bestehenden Routinen zur Lösung der Impulsbilanzen hinzugefügt werden müssen. Weitere zusätzliche Terme in den Impulsbilanzen ergeben sich aus dem Impulsaustausch zwischen den Phasen. Existiert ein Phasenübergang (Massentransfer), muss man die Impulsänderung aufgrund des Phasenübergangs berücksichtigen. Werden turbulente Strömungen betrachtet, ergeben sich weitere Terme, die abhängig sind von der turbulenten kinetischen Energie (vgl. einphasige Impulsbilanz (2.4) und mehrphasige Impulsbilanz (2.55)). Die Impulsbilanzen der zusätzlichen dispersen Phasen unterscheiden sich von denen der kontinuierlichen Phase nur durch den Diffusionsterm. Im laminaren Fall wird der Diffusionsterm bei den dispersen Phasen vernachlässigt. Im turbulenten Fall ergibt sich ein Diffusionsterm im Rahmen des verwendeten Turbulenzmodells. Dabei wird für jede disperse Phase über den Responsekoeffizient C_t die turbulente Viskosität der dispersen Phasen bestimmt (Abschnitt 2.4.2). Um die Anwesenheit der dispersen Phasen zu berücksichtigen, wird der Impulsaustausch zwischen den Phasen über Quellterme modelliert.

Nach der Berechnung der Quellterme für den Impulsaustausch $M_{i,d}$ nach (2.57) werden diese wie folgt in einen impliziten $M_{i,d,impl.}$ und expliziten $M_{i,d,expl.}$ Term aufgeteilt

$$M_{i,d} = F_i (u_{i,d} - u_{i,c}) = F_i u_{i,d} - F_i u_{i,c} = M_{i,impl.} + M_{i,expl.} . \quad (4.28)$$

Diese Behandlung des Quellterms wurde aus Gründen der Stabilität gewählt. Zur Berücksichtigung der Gravitation wird ein weiterer Quellterm explizit für jede Impulsbilanz bestimmt. Dabei wird der Quellterm für die Gravitation in Abhängigkeit der Volumenteile $\alpha_{d,n}$ bestimmt. Wird die Verdampfung berücksichtigt, wird der Impulstransfer durch die übergehende Masse über die DQMOM-Quellterme abgebildet. Die Randbedingungen der Impulsbilanzen für die dispersen Phasen bleiben im Vergleich zu den Impulsbilanzen der kontinuierlichen Phase bis auf die Wandrandbedingung unverändert. Wände werden für die disperse Phase als symmetrische Ränder (Ableitung in Wandnormalenrichtung = 0) behandelt.

Turbulenz

In den Bilanzen für die turbulente kinetische Energie k und ihrer Dissipationsrate ε müssen durch die Anwesenheit der dispersen Phase zusätzliche Quellterme bestimmt werden (2.62). Da diese Quellterme den Impulsaustausch beinhalten, werden diese analog zu den Quelltermen, die den Impulsaustausch abbilden, in den Impulsbilanzen bestimmt. Allerdings werden die Quellterme vollständig explizit behandelt und auf die rechte Seite der Gleichungssysteme für die turbulenten Größen addiert. Auch bei den Bilanzen der turbulenten Größen muss, wegen der nicht vernachlässigbaren Divergenz der Geschwindigkeit, der Produktionsterm erweitert werden (vgl. (2.61)).

4.2.2 DQMOM

Wird die DQMOM zur Darstellung der Verdampfung verwendet, wird für jede zusätzliche Phase eine Transportgleichung für die Wichtung benötigt. Diese hat die gleiche Struktur wie die Transportgleichung des Volumenanteils α_d . Daher werden diese Transportgleichungen äquivalent behandelt. Wird bei der Verdampfung die Sättigung berücksichtigt, wird eine weitere Transportgleichung für den Massenbruch gelöst. Der Massenbruch wird dann zur Bestimmung der Verdampfungskonstanten verwendet. Für die Bestimmung der DQMOM-Quellterme werden in Abhängigkeit der Dimension des Problemgebiets bis zu fünf lineare Gleichungssysteme mit der Dimension 3×3 aufgestellt und mit LAPACK⁵ gelöst. Der ausgewählte Gleichungslöser aus diesem Paket verwendet eine Singulärwertzerlegung [76] zur Lösung der Gleichungssysteme. Bevor die

⁵ Linear Algebra Package

DQMOM-Quellterme gesetzt werden können, werden diese auf Konsistenz überprüft (siehe Abschnitt 3.3.2). Anschließend werden die DQMOM-Quellterme a_n , b_n und c_n explizit für folgende Gleichungssysteme gesetzt:

- a_n für die Wichtungen
- b_n für die Volumenanteile
- b_n für den Massenbruch der verdampften Masse
- b_n in der Druckkorrektur
- c_n für die Impulsbilanzen .

Bevor die einzelnen Gleichungssysteme zur Bestimmung der DQMOM-Quellterme aufgestellt werden, werden für jede Zelle Normierungsgrößen für die Wichtung und für das Tropfenvolumen bestimmt. Bei der Aufstellung der Gleichungssysteme werden die einzelnen Zeilen mit diesen Größen normiert. Dies dient zur Verbesserung der Kondition des zu lösenden Gleichungssystems.

4.2.3 Berechnungsalgorithmus

In Abbildung 4.4 ist der Berechnungsalgorithmus für eine Iteration dargestellt. In der Abbildung ist die Multi-Fluid-Methode im gestrichelten Kasten abgebildet. Zunächst werden die Impulsbilanzen für die kontinuierliche Phase gelöst. Anschließend wird für die kontinuierliche Phase die Druckkorrektur aufgerufen. Dabei werden die Massenflüsse der einzelnen Phasen bestimmt. Nach der Berechnung der kontinuierlichen Phase, werden in einer Schleife (nicht in der Abbildung 4.4) nacheinander die Impuls- und Massenbilanzen der einzelnen dispersen Phasen aufgerufen. Berücksichtigt man die Turbulenz, werden für die kontinuierliche Phase die Gleichungen für die turbulente kinetische Energie und ihrer Dissipationsrate berechnet. Aus den turbulenten Größen bestimmt man dann die Responsekoeffizienten für die dispersen Phasen, bevor die Impuls- und Massenbilanzen der dispersen Phase berechnet werden. Werden verdampfende Strömungen berechnet, wird das DQMOM-Modul aufgerufen. In diesem Modul werden die Transportgleichungen für die Wichtung berechnet. Soll der Effekt der Sättigung berücksichtigt werden, wird die Routine zur Berechnung des Massenbruchs der verdampften Masse aufgerufen. Diese Größe wird dann zur Berechnung der Verdampfungskonstante verwendet.

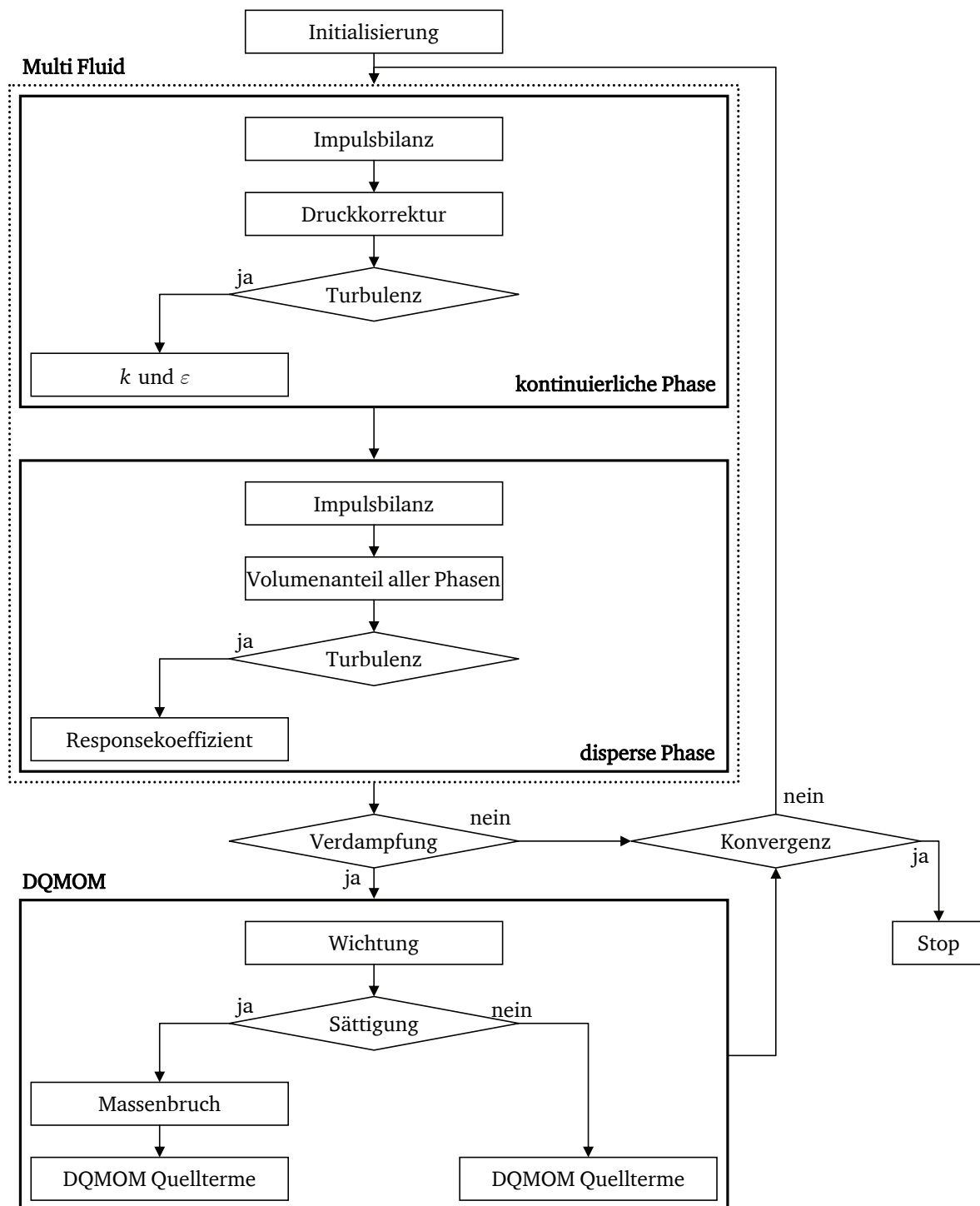


Abbildung 4.4.: Berechnungsalgorithmus



5 Verifizierung

In diesem Kapitel werden die implementierten Methoden und Modelle verifiziert. Zunächst werden einige Testfälle zur Verifikation der Multi-Fluid-Methode und anschließend Testfälle für die DQMOM gezeigt.

5.1 Multi-Fluid-Methode

5.1.1 Freier Fall der dispersen Phase

Der erste Testfall ist eine eindimensionale Konfiguration. Es wird der freie Fall von Tropfen betrachtet, die sich in einem Vakuum befinden. Die Gravitation g wirkt entlang der Fallrichtung. Dieses Problem kann analytisch gelöst werden und dient als Vergleich für die numerische Simulation. Für die Simulation wird ein Kanal mit der Länge $l = 0.5 \text{ m}$ und ein konstanter Querschnitt A gewählt. Die Tropfen strömen mit einer Anfangsgeschwindigkeit $u_0 = 1.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und einem Volumenanteil von $\alpha_{d,0} = 10^{-9}$ in den Kanal. Die analytische Lösung wird aus folgenden Betrachtungen bestimmt. Da nur die Gravitation auf die Tropfen wirkt, kann die Tropfengeschwindigkeit u in Abhängigkeit der Strecke bestimmt werden:

$$u(s) = \sqrt{u_0^2 + 2gs}, \quad (5.1)$$

wobei u_0 die Anfangsgeschwindigkeit und s die Kanallänge ist. Der Vergleich der Tropfengeschwindigkeiten entlang des Kanals ist in Abbildung 5.1 (oben) zu sehen. Der Vergleich zeigt, dass die numerische Simulation die Tropfengeschwindigkeit genau wiedergibt. Daraus kann geschlossen werden, dass die Impulsbilanz und der Quellterm für die Gravitation der Tropfen-Phase (disperse Phase) entlang der Strömungsrichtung korrekt implementiert sind. Betrachtet man die Eingangs- ($\rho u_0 A \alpha_{d,0}$) und die Ausgangsmasse ($\rho u A \alpha$) in den Kanal, ergibt sich der folgende Ausdruck für den Volumenanteil der Tropfen α_d in Abhängigkeit der Geschwindigkeit $u(s)$

$$\alpha_d(s) = \alpha_{d,0} \frac{u_0}{u(s)}. \quad (5.2)$$

Der Volumenanteil der Tropfen muss aufgrund der Kontinuität kleiner werden, wenn ihre Geschwindigkeit steigt. Der Vergleich der analytischen und numerischen Lösung des Volumenanteils der Tropfen ist in Abbildung 5.1 (unten) zu sehen.

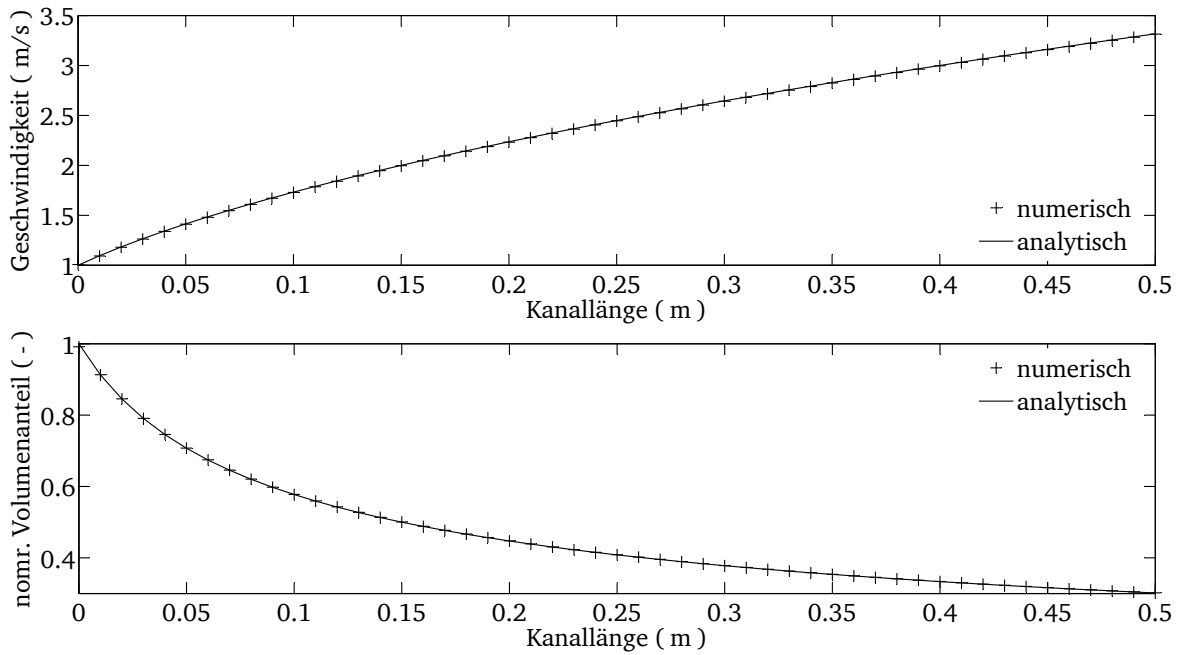


Abbildung 5.1.: Vergleich der analytischen und numerischen Lösung der Tropfengeschwindigkeit (oben) und des normierten Tropfenvolumenanteils (unten) entlang des Kanals

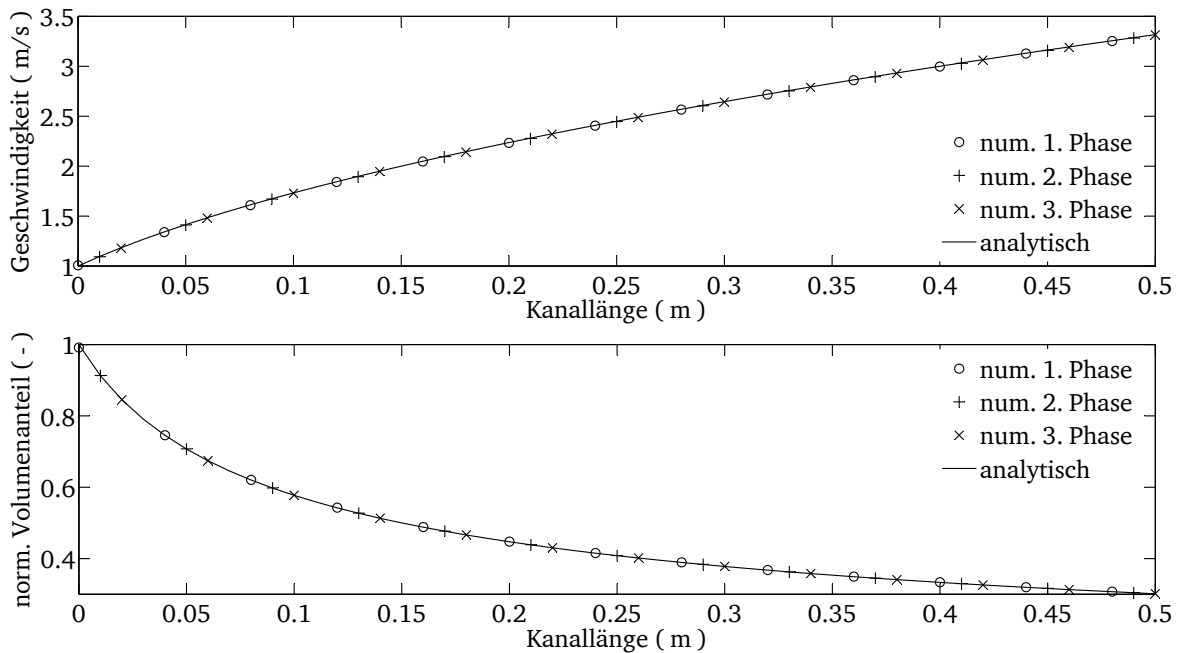


Abbildung 5.2.: Vergleich der Ergebnisse der drei Phasen: Tropfengeschwindigkeit (oben) und normierter Tropfenvolumenanteil (unten)

Die Ergebnisse zeigen den mit dem Anfangsvolumenanteil normierten Verlauf. Wie zu erwarten sinkt der Volumenanteil durch die steigende Tropfengeschwindigkeit. Auch hier kann die numerische Lösung die analytische Lösung exakt wiedergeben. Da für die Multi-Fluid-Methode drei zusätzliche Phasen implementiert wurden, muss auch überprüft werden, ob diese die gleichen Ergebnisse liefern. Dafür wurde eine Simulation durchgeführt, bei der alle drei zusätzlichen Phasen die gleichen Parameter und Randbedingungen verwenden. In Abbildung 5.2 sind die Tropfengeschwindigkeiten und normierten Volumenanteile im Vergleich zu der analytischen Lösung dargestellt. Aus den Ergebnissen ist zu sehen, dass die Implementierung der Impulsbilanz und des Volumenanteiltransports für jede Phase das gleiche Ergebnis liefern.

5.1.2 Einfluss des aerodynamischen Widerstands auf Tropfen

Die folgenden Testfälle verifizieren die Implementierung des aerodynamischen Widerstands (2.57) unter Vernachlässigung der Turbulenz.

Beschleunigung

Als einfacher Testfall werden Tropfen mit einer Dichte ρ_d betrachtet, die sich in einem Gas mit der Dichte ρ_c und einer dynamischen Viskosität μ_c befinden. Das Gas strömt mit einer Geschwindigkeit von $u_c = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ in den eindimensionalen Kanal. Die Tropfen haben am Einlass in den Kanal eine Anfangsgeschwindigkeit von $u_{d,0} = 1.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Zu erwarten ist, dass die Tropfen durch die höhere Gasgeschwindigkeit beschleunigt werden. Eine analytische Lösung für dieses Problem kann unter der Voraussetzung, dass die Gasgeschwindigkeit im Kanal konstant bleibt, gefunden werden. In [30] wird folgende Beziehung zur Berechnung der Tropfengeschwindigkeit in Abhängigkeit der Partikelrelaxationszeit τ_p angegeben

$$u_d(t) = u_c \left(1 - (1 - q_0) e^{-\frac{t}{\tau_p}} \right) \quad \text{mit} \quad q_0 = \frac{u_d(t=0)}{u_c(t=0)}. \quad (5.3)$$

Um die Annahme, dass die Gasgeschwindigkeit sich nicht ändert zu berücksichtigen, wird der Widerstandsquellterm in der Impulsbilanz der Gasphase vernachlässigt (keine Rückwirkung der dispersen Phase auf die kontinuierliche). Die Tropfengeschwindigkeit wurde für drei Durchmesser $d_1 = 25 \mu\text{m}$, $d_2 = 50 \mu\text{m}$ und $d_3 = 75 \mu\text{m}$ berechnet und simuliert. Der Volumenanteil kann analytisch nach (5.2) bestimmt werden. In Abbildung 5.3 ist der Vergleich der Tropfengeschwindigkeiten und der normierten Tropfenvolumenanteile entlang des Kanals zu sehen.

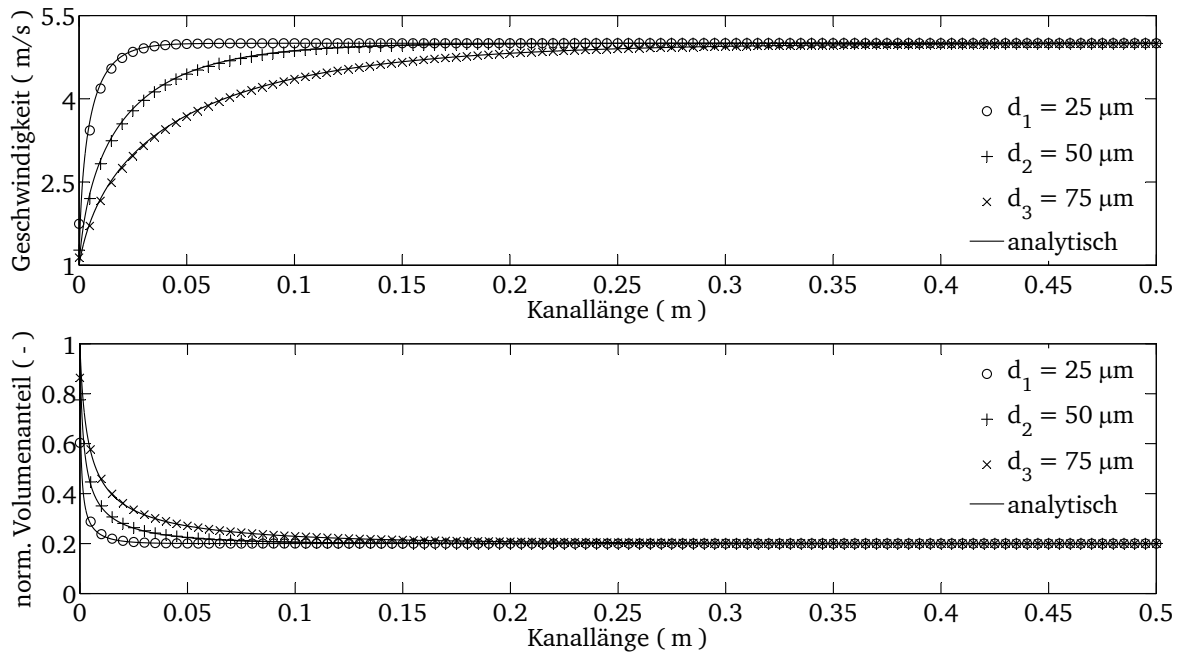


Abbildung 5.3.: Vergleich der analytischen und numerischen Lösung der Tropfengeschwindigkeit (oben) und des Tropfenvolumenanteils (unten) entlang des Kanals (Symbole stehen für numerische Ergebnisse)

Wie erwartet, werden die Tropfen durch die höhere Gasgeschwindigkeit beschleunigt und gleichen sich der Gasgeschwindigkeit an. Der Relaxationsprozess läuft bei kleineren Durchmessern durch die geringere Masse schneller ab. Der Tropfenvolumenanteil wird durch die steigende Tropfengeschwindigkeit geringer. Der Vergleich der analytischen und numerischen Ergebnisse zeigt eine sehr gute Übereinstimmung.

Verzögerung

Dieser Testfall ergibt sich aus dem oberen Testfall, in dem die Gasgeschwindigkeit auf $u_c = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ gesetzt wird und die Tropfen mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $u_{d,0} = 5.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ in den Kanal strömen. Die weiteren Parameter bleiben unverändert. Zu erwarten ist, dass die Tropfen auf Grund der niedrigen Gasgeschwindigkeit verzögert werden und dadurch der Tropfenvolumenanteil steigt. In Abbildung 5.4 sind die numerischen Ergebnisse den analytischen gegenübergestellt. Die Verzögerung der Tropfen bis auf die Gasgeschwindigkeit entlang des Kanals wird sehr gut wiedergegeben und führt zu einer Erhöhung des Tropfenvolumenanteils. Der Vergleich zeigt, dass die analytischen Ergebnisse wiedergegeben werden.

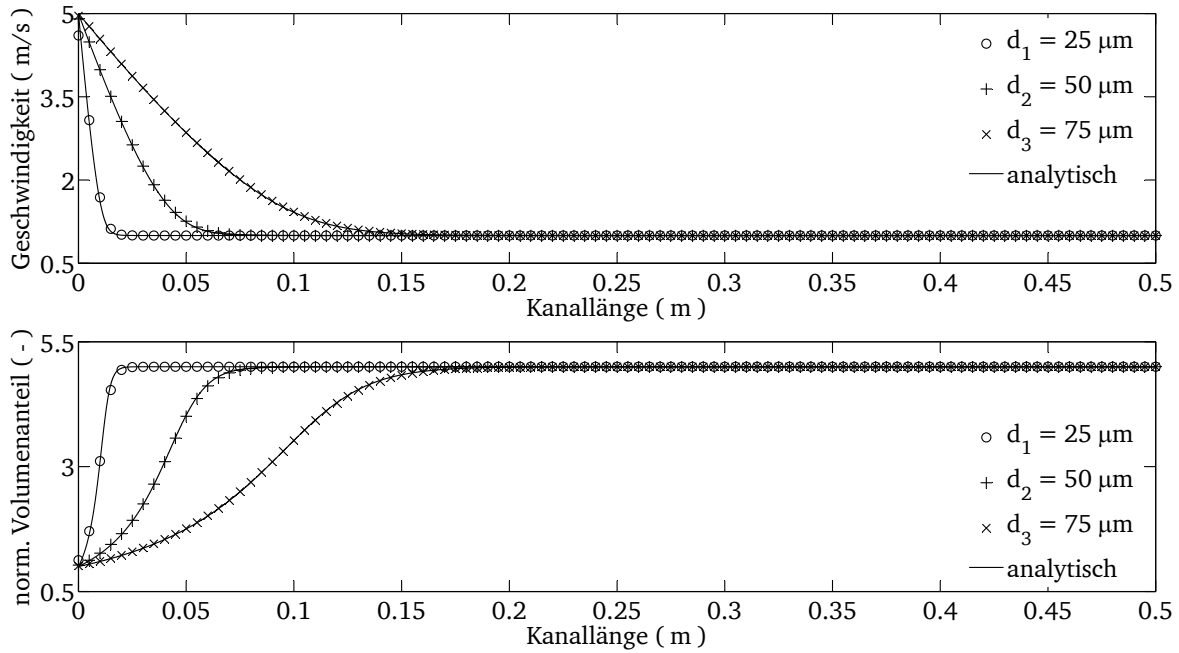


Abbildung 5.4.: Vergleich der analytischen und numerischen Lösung der Tropfengeschwindigkeit (oben) und des Tropfenvolumenanteils (unten) entlang des Kanals (Symbole stehen für numerische Ergebnisse)

5.1.3 Richtungsunabhängigkeit

Die Richtungsunabhängigkeit der Implementierung für jede beliebige Raumrichtung wurde über die oben vorgestellten Testfälle sichergestellt. Dazu wurde der eindimensionale Kanal und somit die Strömung jeweils entlang folgender Vektoren \mathbf{x} im kartesischem System orientiert

- kartesische Richtungen $\mathbf{x} = (1 \ 0 \ 0)^T$, $\mathbf{x} = (0 \ 1 \ 0)^T$ und $\mathbf{x} = (0 \ 0 \ 1)^T$
- Raumdiagonale $\mathbf{x} = (1 \ 1 \ 1)^T$.

Die numerische Simulation der unterschiedlichen Richtungen liefert die gleichen Ergebnisse. In den folgenden Abbildungen sind die Ergebnisse für den Kanal entlang des Vektors $\mathbf{x} = (1 \ 0 \ 0)^T$ und entlang des Vektors $\mathbf{x} = (1 \ 1 \ 1)^T$ (Raumdiagonale) im Vergleich zu sehen. Abbildung 5.5 zeigt die Ergebnisse für den freien Fall. Für die Beschleunigung und die Verzögerung sind die Resultate in Abbildung 5.6 und 5.7 dargestellt. Der Durchmesser beträgt jeweils $d_3 = 75 \mu\text{m}$. Für die Durchmesser d_1 und d_2 hat die Richtung ebenfalls keinen Einfluss auf den Verlauf der Geschwindigkeit und den Verlauf des Volumenanteils.

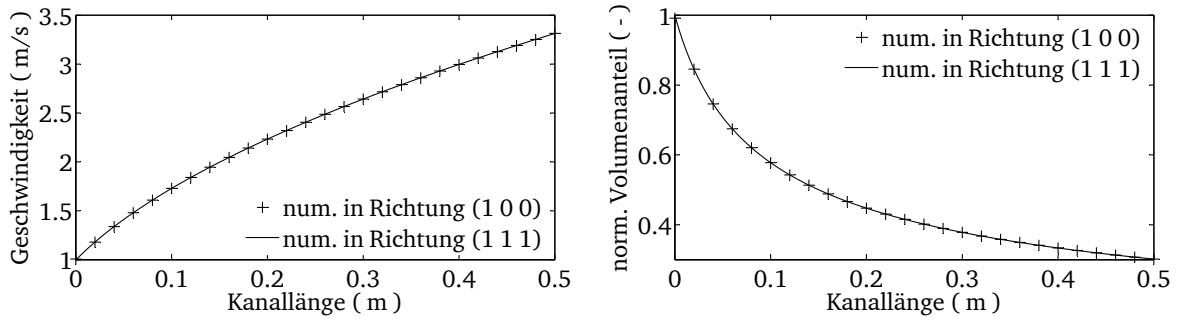


Abbildung 5.5.: Freier Fall der Tropfen für unterschiedliche Richtungen. Tropfengeschwindigkeit (links) und Tropfenvolumenanteil (rechts)

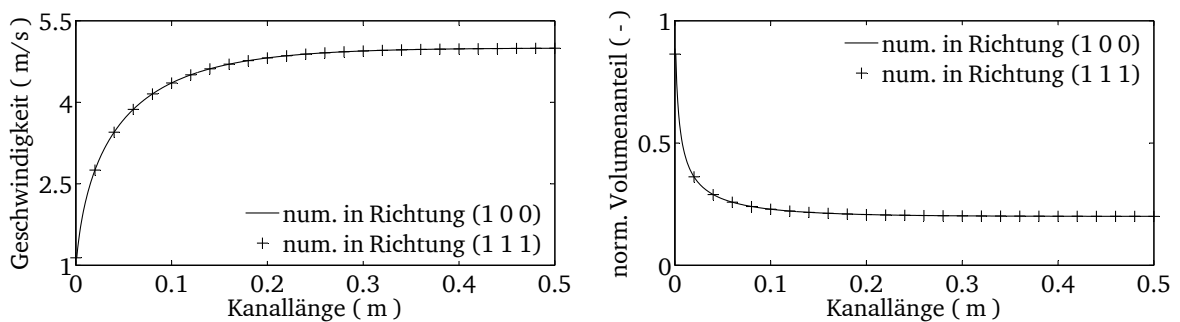


Abbildung 5.6.: Beschleunigung der Tropfen für unterschiedliche Richtungen. Tropfengeschwindigkeit (links) und Tropfenvolumenanteil (rechts)

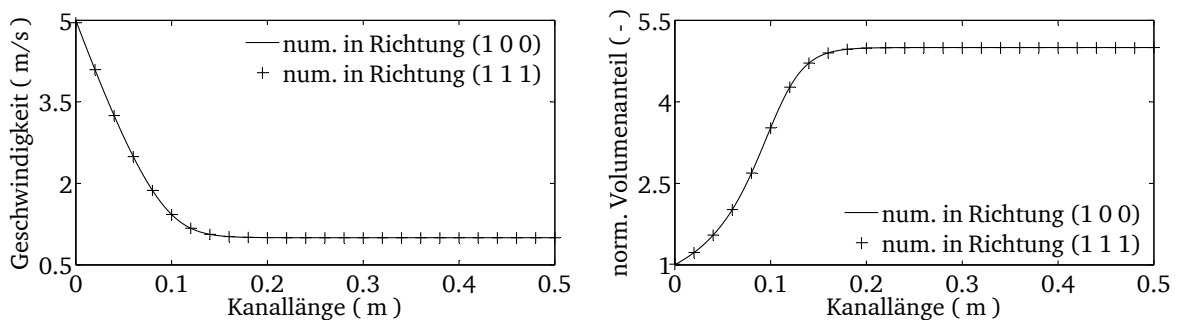


Abbildung 5.7.: Verzögerung der Tropfen für unterschiedliche Richtungen. Tropfengeschwindigkeit (links) und Tropfenvolumenanteil (rechts)

5.2 DQMOM

In diesem Abschnitt werden eindimensionale Testfälle vorgestellt, mit denen die DQMOM verifiziert wird. Zunächst wird die Implementierung der DQMOM und der Verdampfung von Tropfen überprüft. Anschließend werden Testfälle vorgestellt, bei de-

nen die DQMOM gekoppelt mit der Multi-Fluid-Methode mit Ergebnissen aus Euler-Lagrange-Simulationen verglichen werden.

Zur Anwendung der DQMOM in Verbindung mit der Multi-Fluid-Methode muss zunächst eine Verteilung der Tropfendurchmesser vorgegeben werden. In dieser Arbeit werden monodisperse und polydisperse Tropfenverteilungen über Normal- und logarithmische Normalverteilungen abgebildet. Nach Auswahl der Verteilungsfunktion werden die Anfangsbedingungen für die Transportgleichungen der Quadratur-Variablen mit dem PD-Algorithmus bestimmt.

5.2.1 Das D^2 -Gesetz

Da zur Darstellung der Verdampfung das D^2 -Gesetz verwendet wird, muss zunächst überprüft werden, ob mit der DQMOM dieses Gesetz korrekt abgebildet wird. Da bewusst ein einfaches Verdampfungsgesetz gewählt wurde, kann für die Entwicklung des Durchmessers eine analytische Lösung gefunden werden. Wird ein Tropfen mit einem Anfangsdurchmesser $d_0 = 30 \mu\text{m}$ betrachtet und ist eine Verdampfungskonstante E_v gegeben, ergibt sich die Entwicklung des Durchmessers aus dem D^2 -Gesetz zu (siehe Abschnitt 3.3.3)

$$d(t) = \sqrt{d_0^2 - E_v t}. \quad (5.4)$$

Um diesen Testfall numerisch abzubilden, wurde ein eindimensionaler Kanal mit der Länge $l = 1 \text{ m}$ verwendet. Damit die analytischen und numerischen Ergebnisse vergleichbar sind, sind Gas- und Tropfengeschwindigkeit gleich und konstant entlang des Kanals. Dadurch kann der Durchmesser in Abhängigkeit der Strecke verglichen werden (siehe Abbildung 5.8). Für die Simulation mit der DQMOM werden drei Knotenpunkte gewählt ($\alpha = 1, 2, 3$). Daraus folgt, dass drei Durchmesser in den Ergebnissen aus der DQMOM bestimmt werden. Zur Vergleichbarkeit wird aus diesen drei Durchmessern der Mittelwert d_m über folgende Beziehung bestimmt

$$d_m = \frac{\sum_{i=1}^3 w_i d_i}{\sum_{i=1}^3 w_i}. \quad (5.5)$$

In der Abbildung 5.8 ist zu sehen, dass durch die Verdampfung die Tropfen kleiner werden und die Durchmesser quadratisch abfallen. Mit der Implementierung der DQMOM und des Verdampfungsgesetzes wird der Abfall des Durchmessers und der Punkt der vollständigen Verdampfung wie bei der analytischen Lösung vorhergesagt.

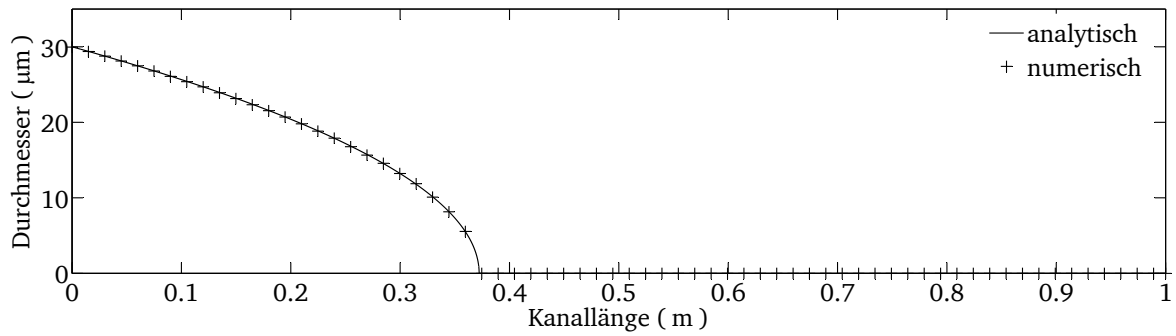


Abbildung 5.8.: Vergleich des Durchmessers entlang des Kanals aus der analytischen und numerischen Berechnung bei konstanter Verdampfungsrate

5.2.2 Vergleich mit Euler-Lagrange

Die Idee der DQMOM ist die Entwicklung von Verteilungsfunktionen über die Entwicklung ihrer Momente zu beschreiben. Zur Überprüfung der Ergebnisse der DQMOM mit drei Knotenpunkten werden Euler-Lagrange-Simulationen verwendet. In diesem Abschnitt werden eindimensionale Testfälle vorgestellt, bei denen Tropfengrößenverteilungen über Normal- und logarithmische Normalverteilungen mit Variation der Standardabweichung untersucht werden. Der vorgegebene mittlere Durchmesser beträgt bei Normalverteilungen $d_m = 30 \mu\text{m}$ und bei logarithmischen Normalverteilungen $d_m = 15 \mu\text{m}$. Zunächst wird der Einfluss der Widerstandskraft (WK) auf die Entwicklung der Momente der Verteilungsfunktionen untersucht, indem die Tropfen einer festgelegten Verteilung mit einer höheren Geschwindigkeit in den Kanal strömen, als das Gas. Weiter wird der Einfluss der Verdampfung (V) über das D^2 -Gesetz und abschließend der Einfluss von Widerstandskraft und Verdampfung auf die Momente der Verteilungen untersucht. In der folgenden Tabelle 5.1 ist eine Übersicht der untersuchten Testfälle zu sehen.

Tabelle 5.1.: Testfälle für den Vergleich von Euler-Lagrange und DQMOM

Verteilung	WK	V	WK und V
normal $\sigma = 0.025$	T1	T4	T11
normal $\sigma = 2.5$	—	T5	T12
normal $\sigma = 5.0$	—	T6	—
normal $\sigma = 7.5$	T2	T7	T13
logarithmisch $\sigma = 0.05$	—	T8	—
logarithmisch $\sigma = 0.25$	—	T9	T14
logarithmisch $\sigma = 0.4$	T3	T10	T15

Der verwendete Euler-Lagrange-Code⁶ löst die betrachteten Verteilungen über einen Zufallsgenerator mit einer Anzahl von 10 bis 10000 Tropfen auf und führt sie in bestimmten Zeitintervallen von 10^{-4} s bis 10^{-3} s dem Kanal zu. In den Simulationen werden Tropfen mit einem Durchmesser $d \leq 1 \mu\text{m}$ als verdampft angenommen. In Abbildung 5.9 werden Verteilungsfunktionen mit 7500 Tropfen, die für die Euler-Lagrange-Simulation verwendet wurden, mit den Verteilungsfunktionen der DQMOM Simulationen verglichen. Dem Kanal werden am Einlass Tropfen gemäß der betrachteten Verteilungsfunktionen zugeführt.

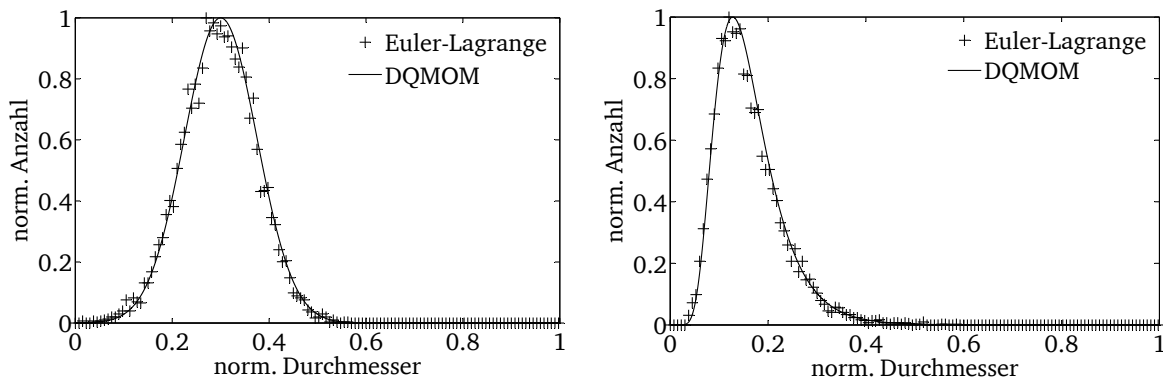


Abbildung 5.9.: Vergleich der verwendeten Verteilungsfunktion für DQMOM und Euler-Lagrange: Normalverteilung mit $\sigma = 7.5$ (links) und Log-Normalverteilung mit $\sigma = 0.4$ (rechts)

Widerstandskraft

Zur Untersuchung der Widerstandskraft und deren Einfluss auf die Momente wurden drei Testfälle betrachtet (siehe Tabelle 5.1 erste Spalte). Die Eintrittsgeschwindigkeit der Tropfen am Einlass des Kanals beträgt $u_d = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Das Gas strömt mit einer konstanten Geschwindigkeit von $u_c = 0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ durch den Kanal. Durch die Widerstandskraft werden die Tropfen verzögert (siehe auch Abschnitt 5.1.2). Für alle betrachteten Fälle ist demnach zu erwarten, dass die Anzahl (0. Moment) entlang des Kanals steigen wird, so lange bis sich die Tropfengeschwindigkeiten der Gasgeschwindigkeit angeglichen haben. Die Entwicklung der mittleren Durchmesser hingegen können sich wegen den unterschiedlichen Tropfengrößen und Widerstandskräften unterscheiden. In den folgenden Abbildungen (5.10, 5.11 und 5.12) werden die ersten n Momente entlang

⁶ Der Code wurde von Nectan de Lostec (ONERA/DMAE in Toulouse) zur Verfügung gestellt und in den Arbeiten von Schneider [75, 77, 78] verwendet.

des Kanals verglichen, die jeweils auf den maximalen anzutreffenden Wert entlang des Kanals normiert sind

$$m_{n,norm} = \frac{m_n}{\max(m_n)}, \quad \text{mit } n = 0, \dots, 3. \quad (5.6)$$

Zunächst ist zu beobachten, dass der Verzögerungsprozess und der Einfluss der Widerstandskraft auf die Momente der Tropfenverteilungen von DQMOM im Vergleich zu den Ergebnissen der Euler-Lagrange-Rechnungen sehr gut wiedergegeben werden. Die leichten Schwankungen in den Euler-Lagrange-Rechnungen sind durch die verwendete Anzahl an Tropfen begründet. Durch eine Absenkung des Intervalls der Zuführung der Tropfenverteilungen in den Kanal (Erhöhung der Tropfenanzahl) wären die Schwankungen auf Kosten der Rechenzeit zu beseitigen. Durch den Verzögerungsprozess steigt, wie erwartet, bei allen drei Testfällen das 0. Moment an. Dies kann als Steigerung der Anzahl an Tropfen interpretiert werden. Durch die steigende Anzahl an Tropfen steigen auch jeweils die weiteren Momente (1.-3.). Bei der logarithmischen Verteilung (Abbildung 5.12) ist der gewählte mittlere Durchmesser d_m kleiner als bei den Normalverteilungen. Dies macht sich durch einen schnelleren Relaxationsprozess bemerkbar.

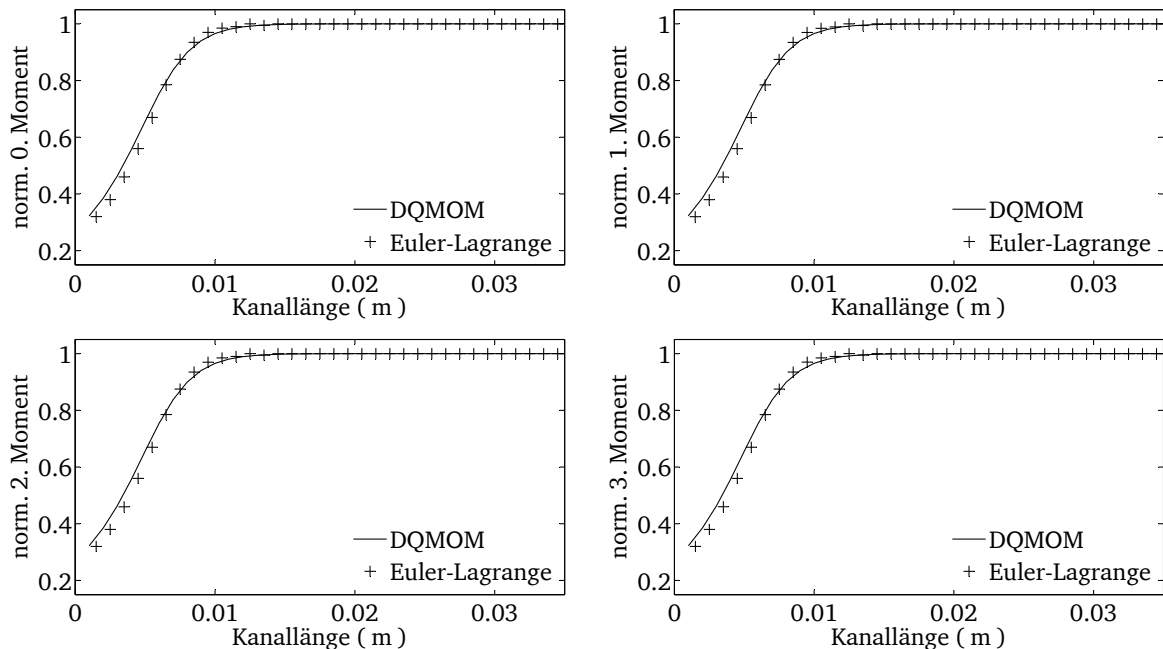


Abbildung 5.10.: Vergleich der normierten Momente Testfall T1 aus Berechnungen mit DQMOM und Euler-Lagrange: 0. Moment (o. links), 1.Moment (o. rechts), 2. Moment (u. links) und 3. Moment (u. rechts)

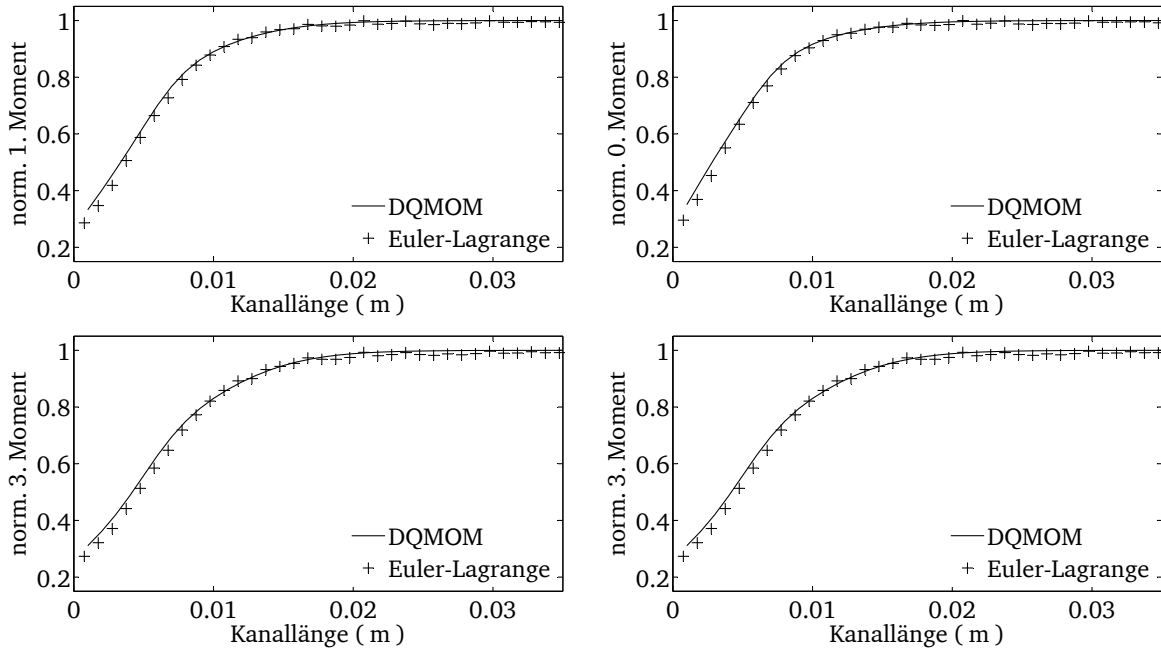


Abbildung 5.11.: Vergleich der normierten Momente Testfall T2 aus Berechnungen mit DQMOM und Euler-Lagrange: 0. Moment (o. links), 1.Moment (o. rechts), 2. Moment (u. links) und 3. Moment (u. rechts)

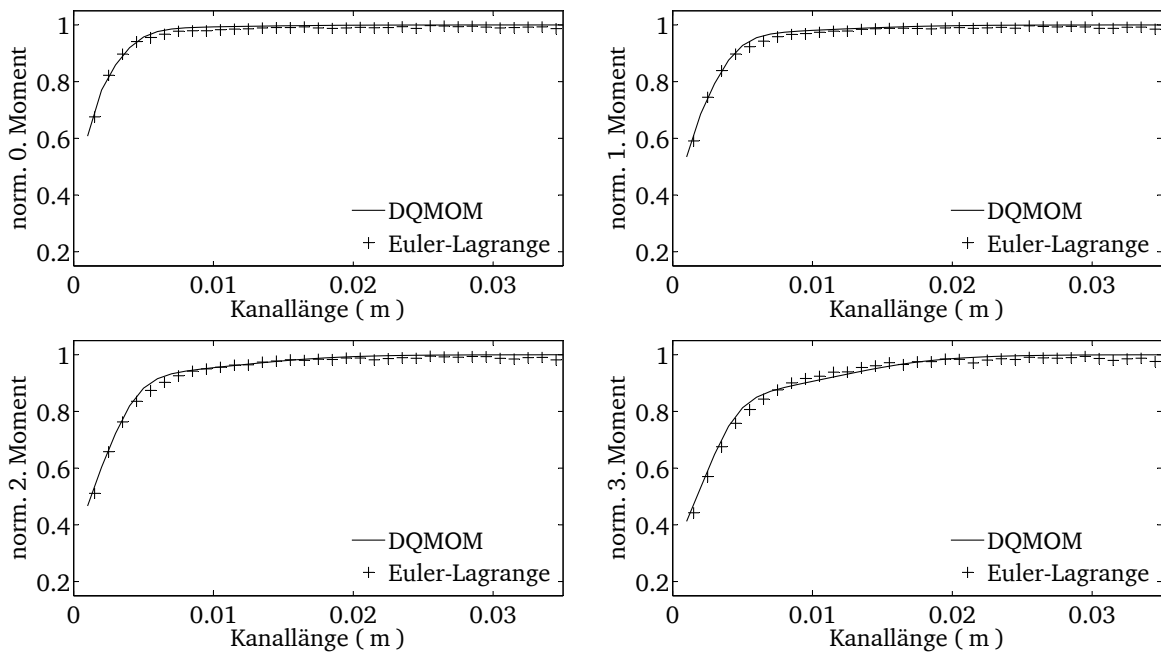


Abbildung 5.12.: Vergleich der normierten Momente Testfall T3 aus Berechnungen mit DQMOM und Euler-Lagrange: 0. Moment (o. links), 1.Moment (o. rechts), 2. Moment (u. links) und 3. Moment (u. rechts)

Zur Interpretation der Ergebnisse der weiteren Momente (1.-3.) bietet sich der Testfall T1 an, da wegen der kleinen Standardabweichung angenommen werden kann, dass eine monodisperse Tropfenverteilung vorliegt (nur ein Durchmesser). Im direkten Vergleich der Momente 1.-3. ergibt sich die Änderung des jeweiligen Momentes nur durch die Änderung der Anzahl der Tropfen. Für weitere Interpretationen der Ergebnisse ist es sinnvoll den mittleren d_m oder den Sauterdurchmesser d_{32} (siehe Abschnitt 3.1.1) zu betrachten

$$d_m = \frac{m_1}{m_0} \quad (5.7)$$

und

$$d_{32} = \frac{m_3}{m_2}. \quad (5.8)$$

In den folgenden Abbildungen 5.13-5.15 sind die normierten mittleren Durchmesser und die normierten Sauterdurchmesser entlang des Kanals zu sehen.

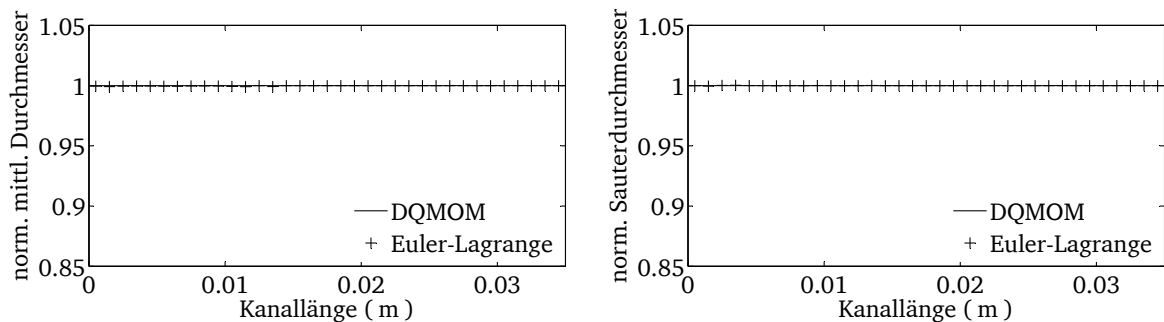


Abbildung 5.13.: Vergleich des mittleren Durchmessers (links) und des Sauterdurchmessers (rechts) Testfall T1

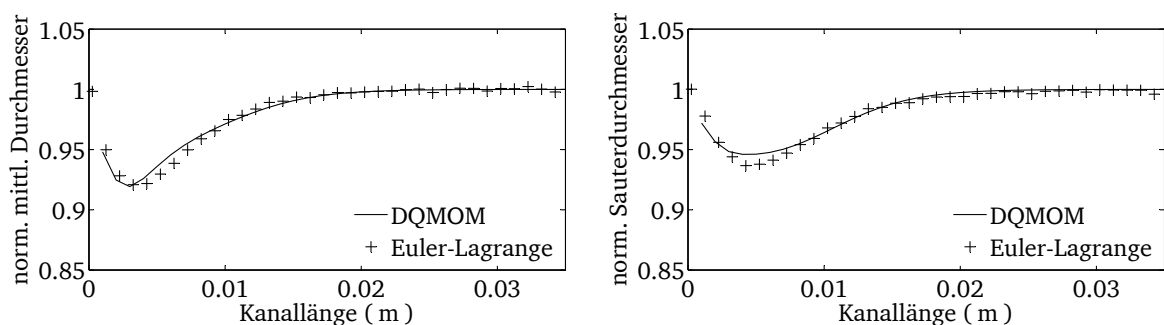


Abbildung 5.14.: Vergleich des mittleren Durchmessers (links) und des Sauterdurchmessers (rechts) Testfall T2

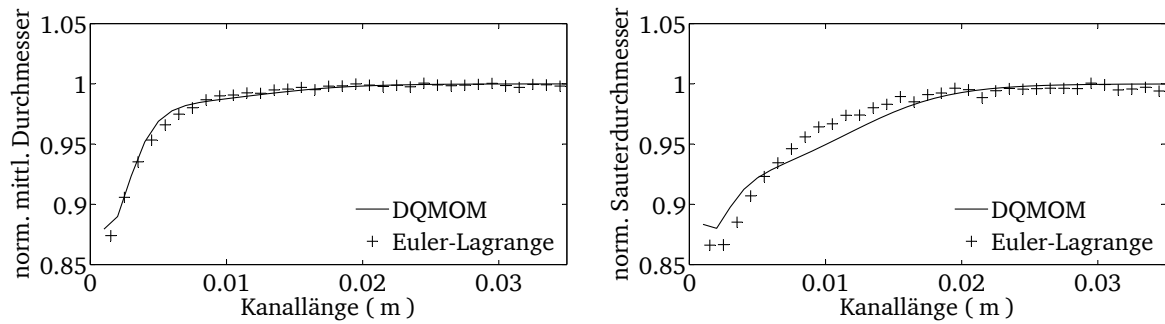


Abbildung 5.15.: Vergleich des mittleren Durchmessers (links) und des Sauterdurchmessers (rechts) Testfall T3

Für den Testfall T1 ergibt sich keine Änderung durch die Widerstandskraft für den mittleren Durchmesser und den Sauterdurchmesser entlang des Kanals. Hier wird deutlich, dass die Änderungen der Momente (1.-3.) nur durch das 0. Moment begründet sind. Für die Testfälle T2 und T3 ergibt sich durch die Widerstandskraft eine Absenkung für d_m und d_{32} . Dies kann dadurch erklärt werden, dass kleine Tropfen stärker verzögert werden als große Tropfen (vgl. Abbildung 5.4) und daher kurz nach dem Eintritt in den Kanal die Anzahl an kleinen Tropfen steigt. Der Unterschied zwischen Testfall T2 und T3 ergibt sich aus der Form der Verteilung (vgl. Abbildung 5.9) bzw. aus dem Verhältnis der Anzahl der Tropfen mit kleinen Durchmessern zu Tropfen mit großen Durchmessern.

Verdampfung

Um die Darstellbarkeit der Verdampfung mit der DQMOM zu untersuchen, wird das D^2 -Gesetz verwendet (konstante Verdampfungsrate). Für alle Testfälle (siehe Tabelle 5.1, zweite Spalte) soll nur die Verdampfung einen Einfluss auf die Tropfen und die Änderung der Momente haben. Damit keine Widerstandskräfte auftreten werden die Tropfen der betrachteten Verteilungen mit der Geschwindigkeit $u_c = u_d = 0.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ dem Kanal zugeführt. Die Verdampfungskonstante ist dabei so gewählt, dass die größten auftretenden Tropfen innerhalb des Kanals verdampfen. In den folgenden Abbildungen 5.16-5.19 und 5.21-5.23 ist der Vergleich der normierten Momente (0.-3.) für die Testfälle T4-T10 zu sehen. Für Testfall T4 kann die DQMOM den Verlauf der Momente und den Punkt vollständiger Verdampfung ($m_0 = m_1 = m_2 = m_3 = 0$) im Vergleich zu den Ergebnissen aus der Euler-Lagrange Rechnung sehr gut wiedergeben. Die Änderung der Momente 1.-3. zeigen, dass durch die Verdampfung die Tropfen kleiner werden. Dabei ist das 1. Moment proportional zum Tropfendurchmesser, das 2. Moment proportional zur Tropfenoberfläche und das 3. Moment proportional zum Tropfenvolumen.

Das 0. Moment kann als Anzahl der Tropfen interpretiert werden und bleibt so lange unverändert, bis alle Tropfen gleichzeitig verdampfen.

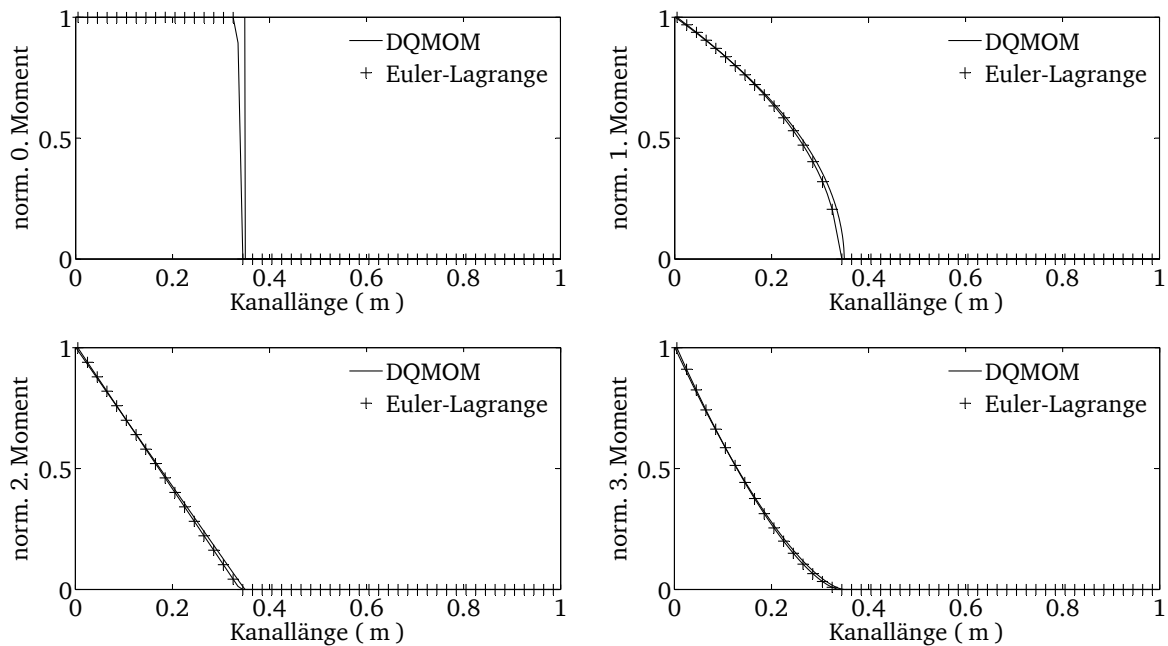


Abbildung 5.16.: Vergleich der normierten Momente Testfall T4 aus Berechnungen mit DQMOM und Euler-Lagrange: 0. Moment (oben links), 1. Moment (oben rechts), 2. Moment (unten links) und 3. Moment (unten rechts)

In den Abbildungen 5.17 - 5.19 sind die Ergebnisse aus der Verdampfung von Tropfen, deren Durchmesser normalverteilt sind, zu sehen. Der Punkt, an dem alle Tropfen vollständig verdampft sind (im Folgenden auch als Verdampfungspunkt bezeichnet), kann bei allen Testfällen (T5-T7) richtig vorhergesagt werden. Allerdings ist zu beobachten, dass der Verlauf des 0. Moments bei allen Testfällen die größten Abweichungen im Vergleich zu den Euler-Lagrange-Ergebnissen zeigt und dieser mit steigender Standardabweichung kleiner wird. Am Beispiel der Normalverteilung mit einer Standardabweichung von $\sigma = 2.5$ (Testfall T5) kann der Einfluss der Verdampfung auf das 0. Moment im Vergleich zu Testfall T4 wie folgt interpretiert werden. Durch die vorgegebene Tropfenverteilung existieren bei Testfall T5 Tropfen mit einem Durchmesser kleiner und größer als der mittlere Durchmesser. Die kleineren Tropfen verdampfen früher und das 0. Moment fällt früher ab, als bei Testfall T4. Die größeren Tropfen verdampfen später und der Verdampfungspunkt liegt weiter hinten im Kanal. Dadurch, dass das Maximum der Tropfenverteilung beim mittleren Durchmesser liegt, ergibt sich ein Wendepunkt im Verlauf des 0. Moments. Je größer die Standardabweichung ist, desto flacher wird der Abfall des 0. Moments.

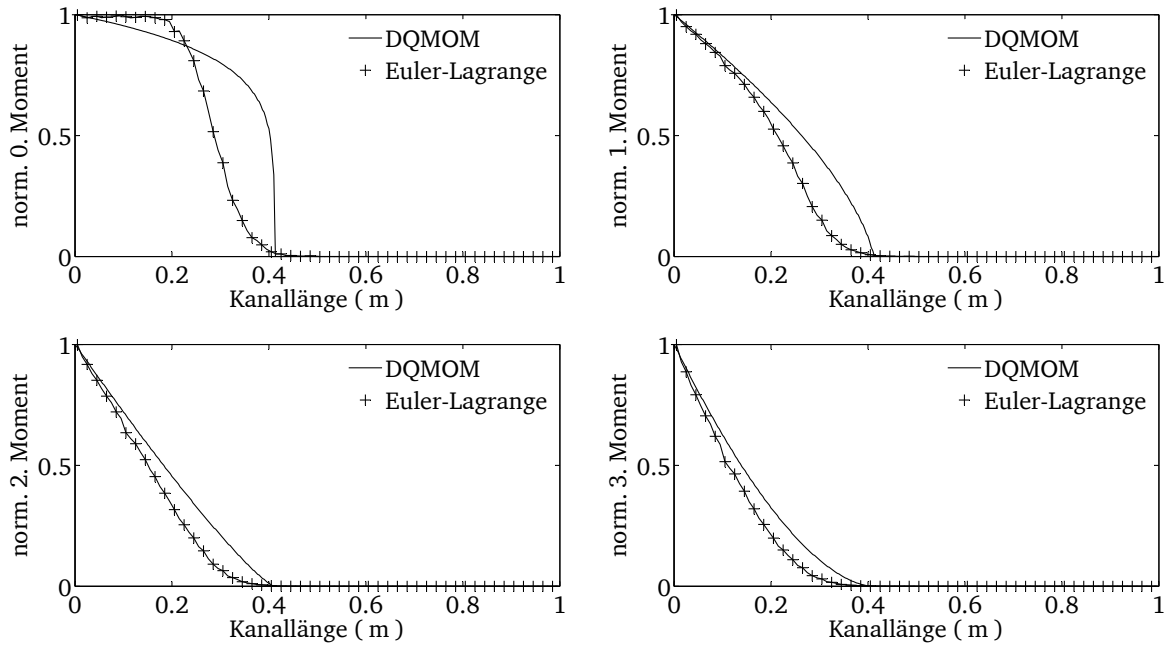


Abbildung 5.17.: Vergleich der normierten Momente Testfall T5 aus Berechnungen mit DQMOM und Euler-Lagrange: 0. Moment (oben links), 1. Moment (oben rechts), 2. Moment (unten links) und 3. Moment (unten rechts)

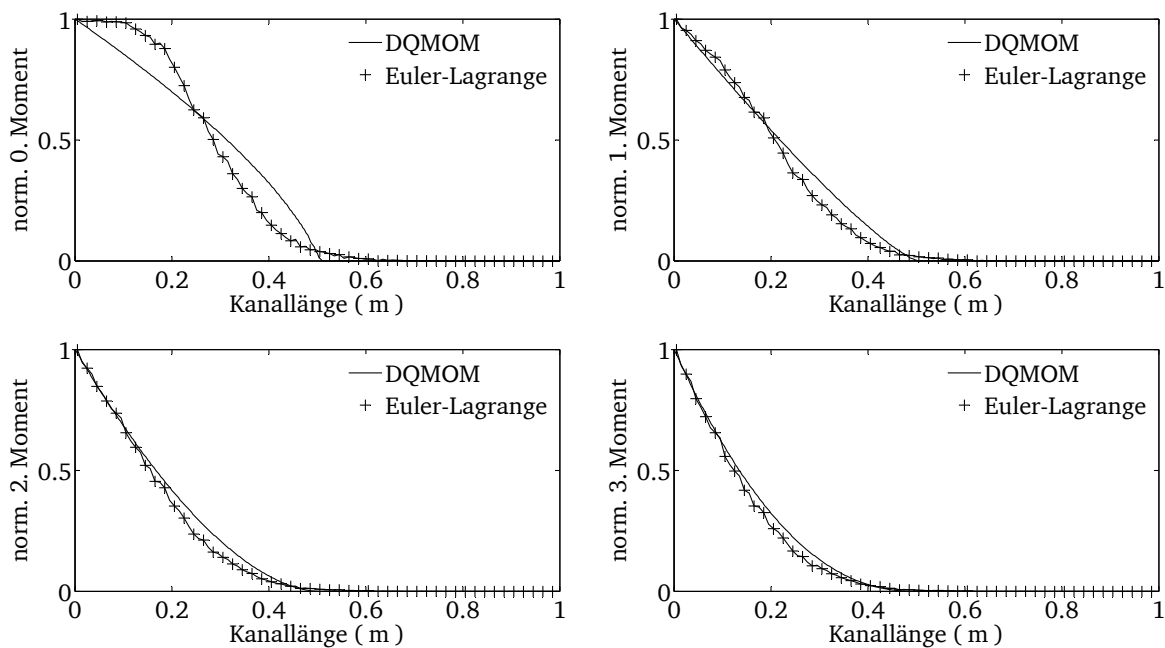


Abbildung 5.18.: Vergleich der normierten Momente Testfall T6 aus Berechnungen mit DQMOM und Euler-Lagrange: 0. Moment (oben links), 1. Moment (oben rechts), 2. Moment (unten links) und 3. Moment (unten rechts)

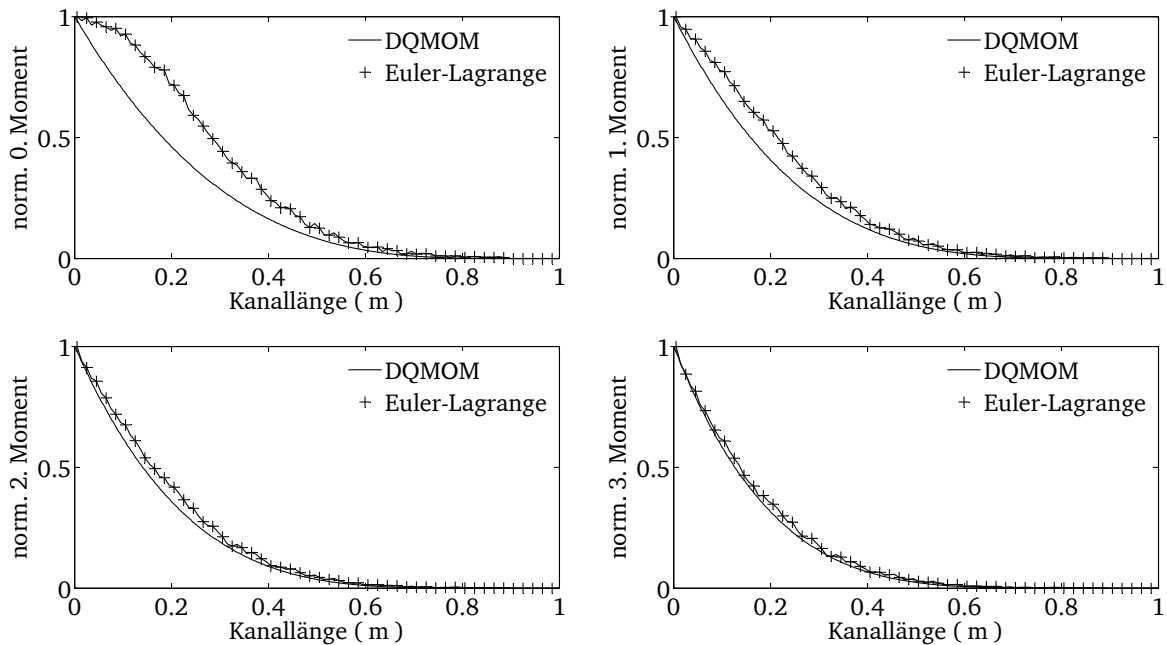


Abbildung 5.19.: Vergleich der normierten Momente Testfall T7 aus Berechnungen mit DQMOM und Euler-Lagrange: 0. Moment (oben links), 1. Moment (oben rechts), 2. Moment (unten links) und 3. Moment (unten rechts)

Bei den Ergebnissen der DQMOM ist zu sehen, dass der Verlauf des 0. Moments die Ergebnisse aus der Euler-Lagrange-Simulation nicht korrekt abbildet. Das 0. Moment fällt bereits am Eintritt des Kanals ab und deutet darauf hin, dass Tropfen vollständig verdampfen, während bei den Ergebnissen mit Euler-Lagrange noch keine Tropfen vollständig verdampfen. Ein weiterer Unterschied findet sich im Verlauf des 0. Moments. Die bei Euler-Lagrange-Ergebnissen zu beobachtenden Wendepunkte werden mit der DQMOM nicht abgebildet. Die Verläufe des 1.-3. Moments entlang des Kanals werden von DQMOM im Vergleich zu Euler-Lagrange gut wiedergegeben. Die Abweichung zwischen DQMOM und Euler-Lagrange-Ergebnissen sinkt, je größer die Ordnung des betrachteten Momentes ist. Die Fehler in den höheren Momenten (1.-3.) werden durch den Fehler des 0. Momentes verursacht und sind zusätzlich abhängig davon, in welchem Bereich im Kanal der Fehler (0. Moment) gemacht wird. Je weiter der Fehler in Richtung des Verdampfungspunktes liegt, desto größer sind auch die Fehler in den höheren Momenten (1.-3.). Um dies zu verdeutlichen ist der Fehler des 0. Moments in den Abbildungen 5.20 gezeigt. Dies kann dadurch erklärt werden, dass in Richtung des Verdampfungspunktes nur noch sehr wenige Tropfen existieren und eine Unter- bzw. Überschätzung der Anzahl einen größeren Einfluss hat.

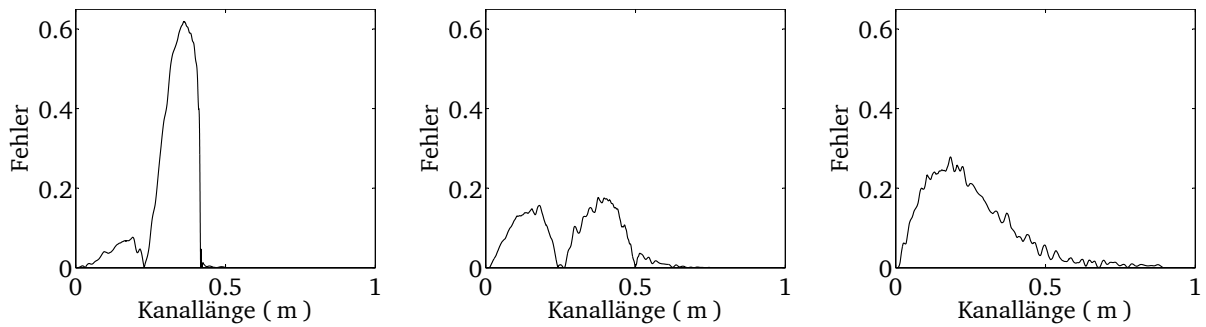


Abbildung 5.20.: Fehler des 0. Momentes: T5 (links), T6 (mitte) und T7 (rechts)

In den Abbildungen 5.21-5.23 sind die Ergebnisse für die Verdampfung von Tropfen, deren Durchmesser logarithmisch normalverteilt sind, dargestellt. Der Vergleich zwischen den Ergebnissen aus den Berechnungen mit DQMOM und Euler-Lagrange zeigt, dass auch hier der Verlauf des 0. Momentes nicht korrekt abgebildet wird, aber der Verdampfungspunkt dargestellt werden kann. Vergleicht man die Ergebnisse der Normalverteilungen mit den logarithmischen Normalverteilungen, ist zu sehen, dass eine höhere Standardabweichung zu einer schlechteren Darstellbarkeit bei logarithmischen Normalverteilungen führt.

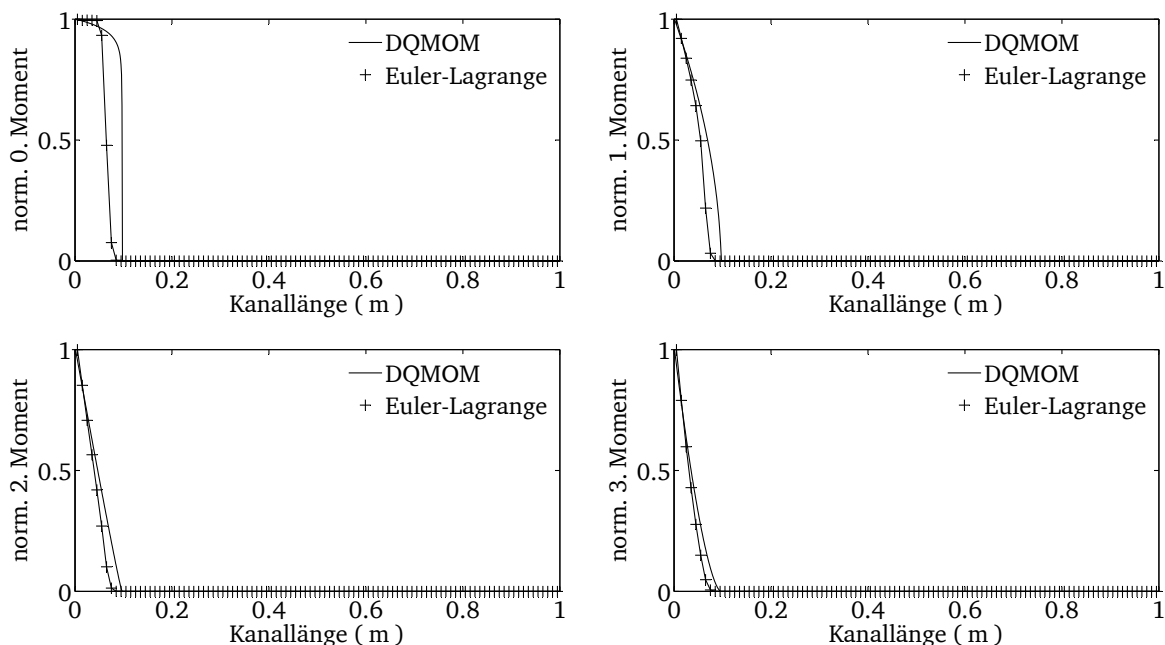


Abbildung 5.21.: Vergleich der normierten Momente Testfall T8 aus Berechnungen mit DQMOM und Euler-Lagrange: 0. Moment (oben links), 1. Moment (oben rechts), 2. Moment (unten links) und 3. Moment (unten rechts)

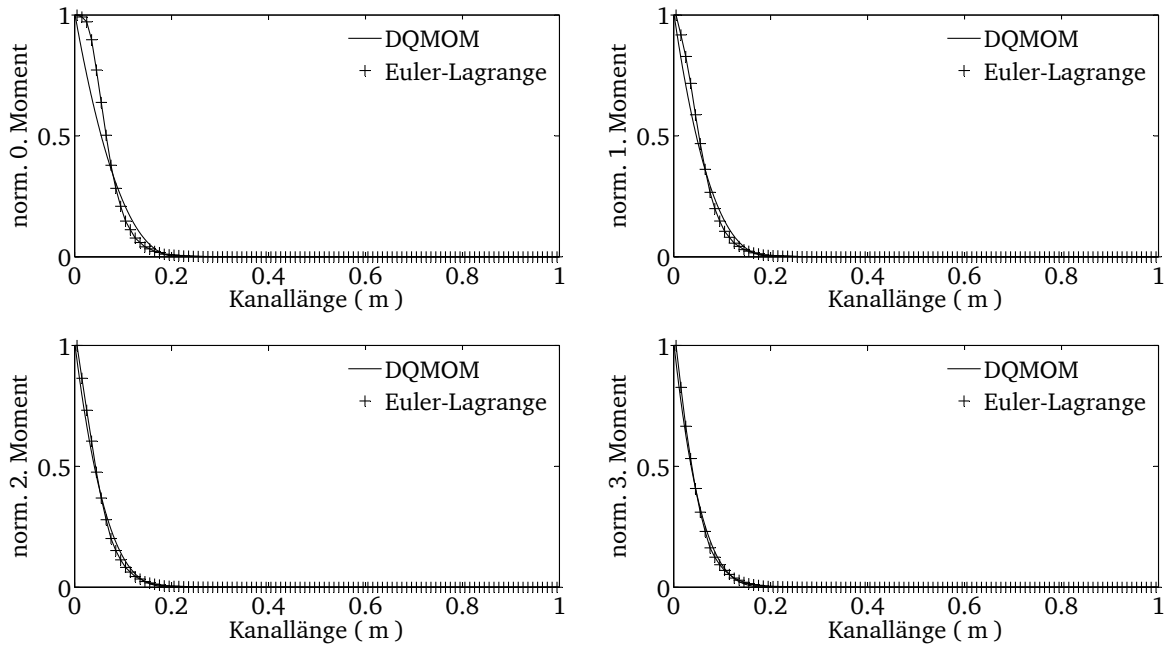


Abbildung 5.22.: Vergleich der normierten Momente Testfall T9 aus Berechnungen mit DQMOM und Euler-Lagrange: 0. Moment (oben links), 1. Moment (oben rechts), 2. Moment (unten links) und 3. Moment (unten rechts)

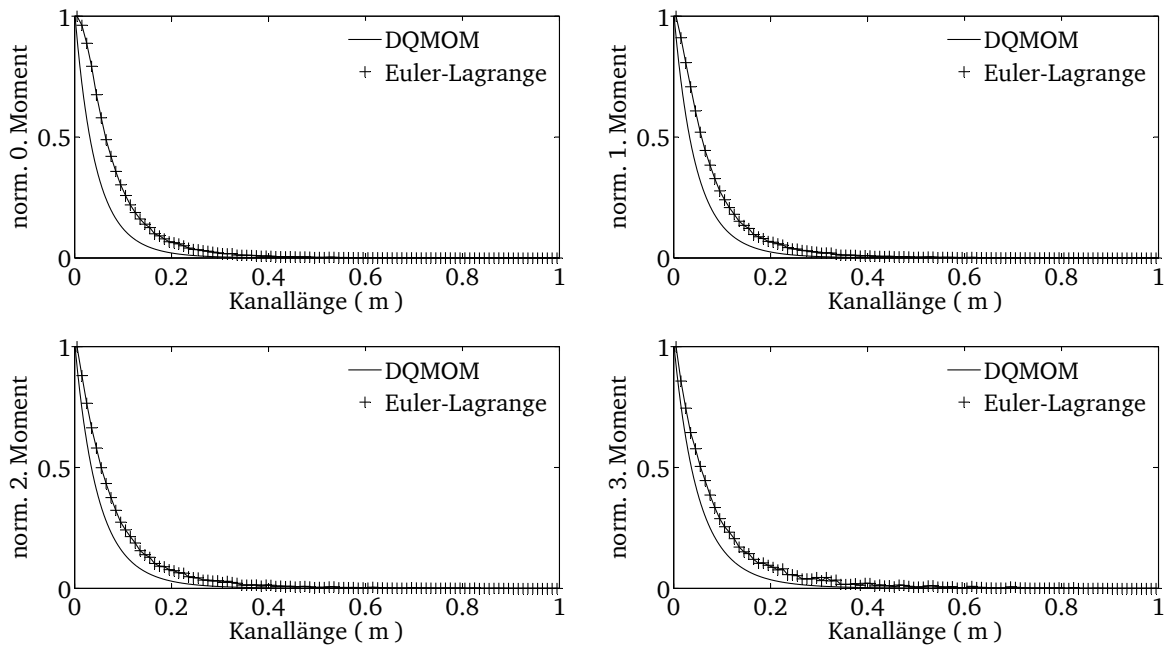


Abbildung 5.23.: Vergleich der normierten Momente Testfall T10 aus Berechnungen mit DQMOM und Euler-Lagrange: 0. Moment (oben links), 1. Moment (oben rechts), 2. Moment (unten links) und 3. Moment (unten rechts)

Widerstandskraft und Verdampfung

Bei Spray in technischen Anwendungen können Verdampfung, Widerstandskraft und abhängig von der Dichte auch Kollision, Koaleszenz und Zerfall gleichzeitig auftreten. Daher wird in den folgenden Testfällen (T11-T15) zur Annäherung an technische Sprays der kombinierte Einfluss von Widerstandskraft und Verdampfung auf die betrachteten Tropfenverteilungen untersucht. Um eine Widerstandskraft zu erhalten, werden die Tropfen mit einer Eintrittsgeschwindigkeit von $u_d = 2.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und das Gas mit einer Eintrittsgeschwindigkeit von $u_c = 0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ dem Kanal zugeführt. Die Verdampfungskonstante bleibt unverändert, damit die Tropfen innerhalb des Kanals verdampfen. Der Einfluss von Widerstandskraft und Verdampfung auf die betrachtete Tropfenverteilung für Testfall T11 ist in Abbildung 5.24 zu sehen. Der Vergleich mit den Momenten der Euler-Lagrange-Simulation zeigt, dass DQMOM diesen Fall sehr gut wiedergeben kann. Die Widerstandskraft führt zur Verzögerung der Tropfen und zum Anstieg der Momente (vgl. Abschnitt 5.2.2). Die Verdampfung bewirkt, dass die Tropfen kleiner werden und die Momente 1.-3. abfallen (vgl. Abschnitt 5.2.2). Da alle Tropfen gleichzeitig vollständig verdampfen, fällt das 0. Moment schlagartig ab.

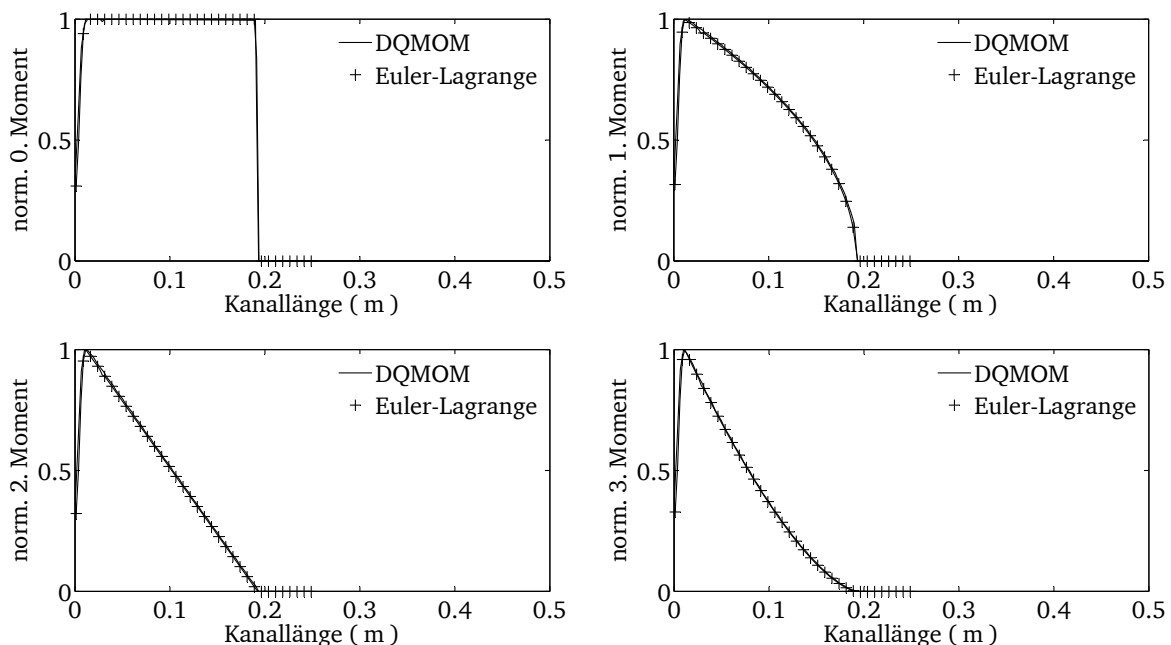


Abbildung 5.24.: Vergleich der normierten Momente Testfall T11 aus Berechnungen mit DQMOM und Euler-Lagrange: 0. Moment (oben links), 1. Moment (oben rechts), 2. Moment (unten links) und 3. Moment (unten rechts)

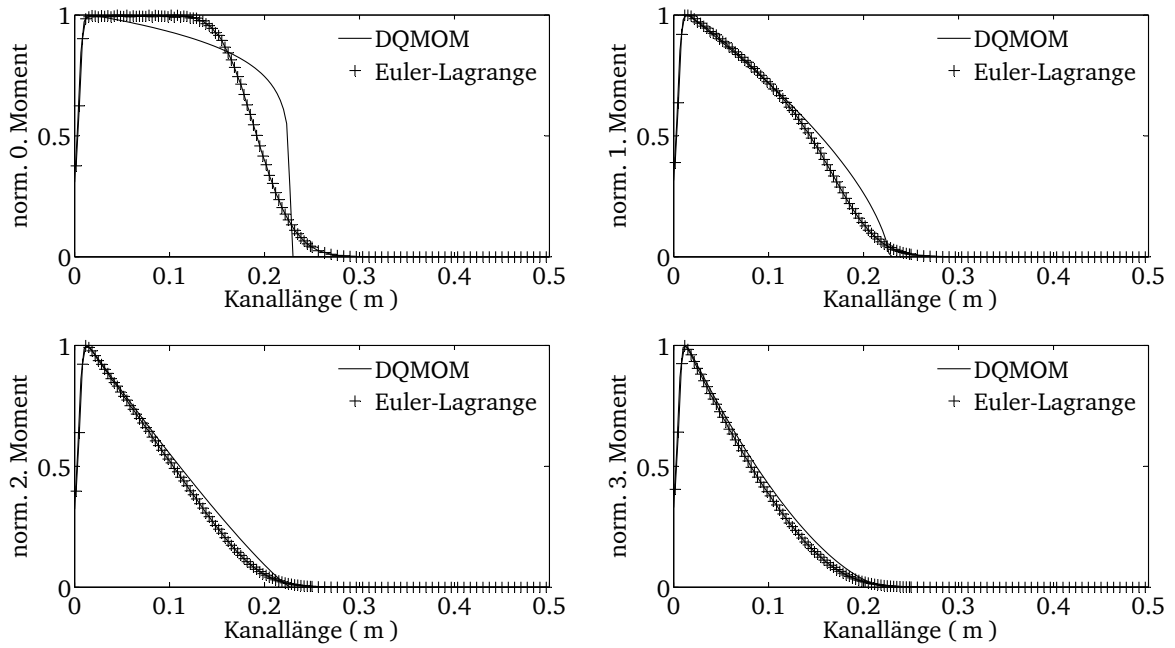


Abbildung 5.25.: Vergleich der normierten Momente Testfall T12 aus Berechnungen mit DQMOM und Euler-Lagrange: 0. Moment (oben links), 1. Moment (oben rechts), 2. Moment (unten links) und 3. Moment (unten rechts)

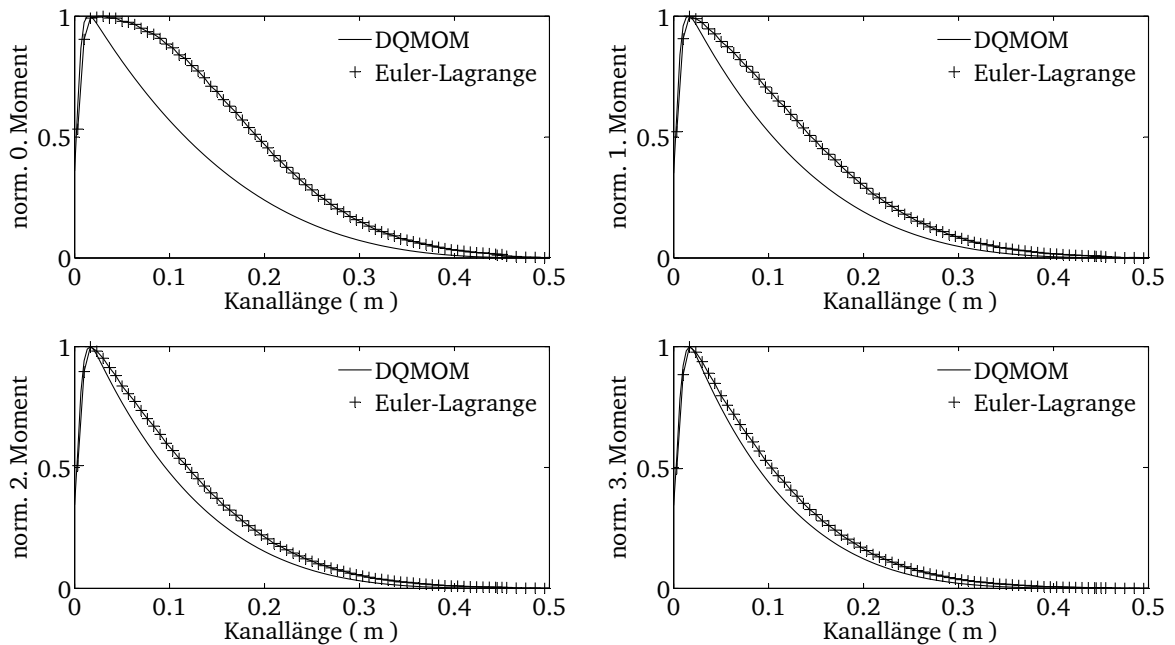


Abbildung 5.26.: Vergleich der normierten Momente Testfall T13 aus Berechnungen mit DQMOM und Euler-Lagrange: 0. Moment (oben links), 1. Moment (oben rechts), 2. Moment (unten links) und 3. Moment (unten rechts)

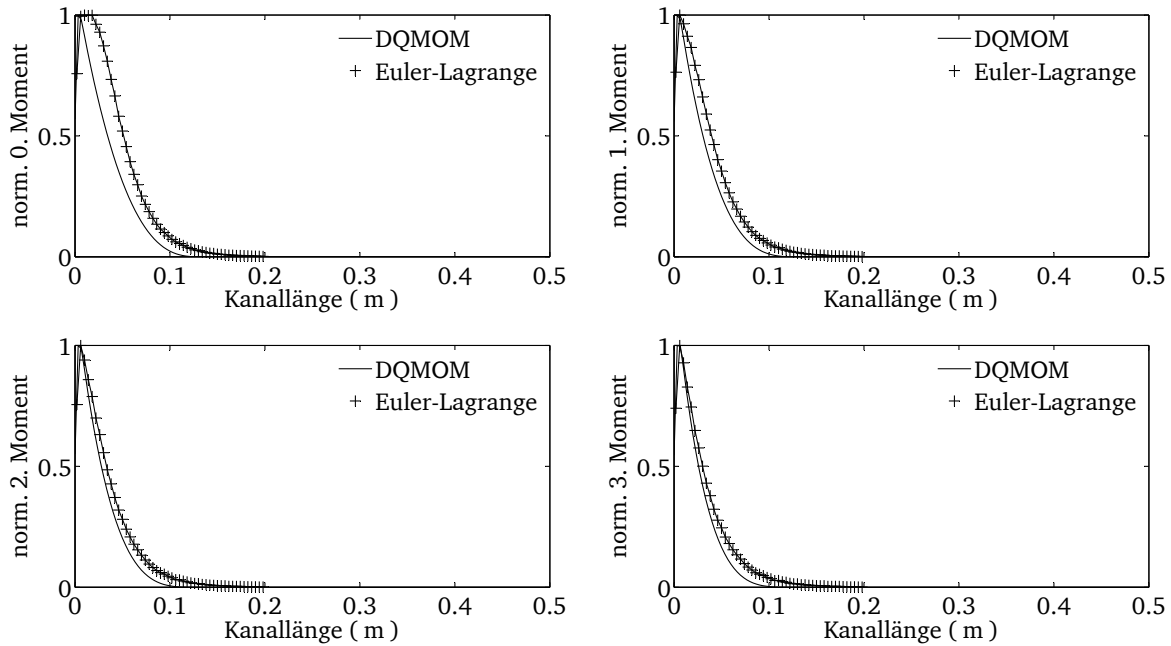


Abbildung 5.27.: Vergleich der normierten Momente Testfall T14 aus Berechnungen mit DQMOM und Euler-Lagrange: 0. Moment (oben links), 1. Moment (oben rechts), 2. Moment (unten links) und 3. Moment (unten rechts)

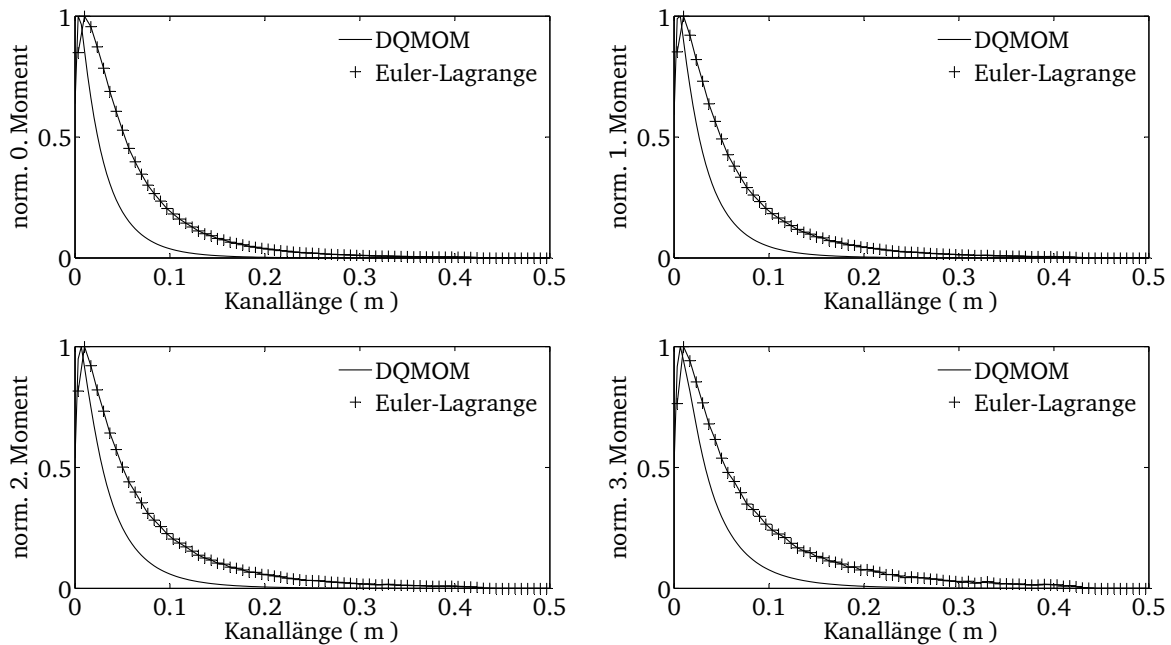


Abbildung 5.28.: Vergleich der normierten Momente Testfall T15 aus Berechnungen mit DQMOM und Euler-Lagrange: 0. Moment (oben links), 1. Moment (oben rechts), 2. Moment (unten links) und 3. Moment (unten rechts)

Die Abbildungen 5.25 und 5.26 zeigen die Ergebnisse für normalverteilte Tropfendurchmesser und Abbildungen 5.27 und 5.28 die Ergebnisse für logarithmisch normalverteilte Tropfendurchmesser. Aus den Ergebnissen ist zu sehen, dass die Erhöhung aller Momente durch den Verzögerungsprozess bei allen Testfällen trotz Verdampfung mit der DQMOM gut abgebildet wird. Wie bereits in Abschnitt 5.2.2 erläutert, wird der Verdampfungsprozess im Rahmen der verwendeten Methode zufriedenstellend wiedergegeben. Hier bestätigt sich, dass bei der Verdampfung die logarithmischen Normalverteilungen mit der DQMOM schwieriger abzubilden sind als Normalverteilungen. Die Widerstandskraft hat in den betrachteten Testfällen keinen größeren Einfluss auf die Abbildbarkeit der Verdampfung.

Zusammenfassung DQMOM

In diesem Abschnitt wurde gezeigt, dass die DQMOM die Veränderung der Momente durch die Widerstandskraft bei den betrachteten Tropfenverteilungen sehr gut wiedergeben kann. Bei der Verdampfung zeigt der Vergleich mit den Ergebnissen der Euler-Lagrange-Rechnung, dass die DQMOM nach Erweiterung von Fox [22] mit den *Ratio Constraints* die vollständige Verdampfung und den Verdampfungspunkt gut vorhergesagt. Bei der Untersuchung der Verdampfung unterschiedlicher Tropfenverteilungen mit der DQMOM und den *Ratio Constraints* ist zu beobachten, dass die monodispersen Testfälle sehr gut abgebildet und bei den polydispersen Testfällen generell das 0. Moment schwierig abzubilden ist. Die Fehler, die bei der Bestimmung des 0. Momentes auftreten, führen zu Fehlern in den höheren Momenten. Dabei wird der Fehler kleiner, je höher die Ordnung des Momentes ist. Die *Ratio Constraints* führen bei polydispersen Verteilungen generell zu einem stetigen Verlauf des 0. Moments, die eine Abbildung unstetiger Verteilungen (z. B. Doppel-Peak) schwierig macht.

5.3 Gitterstudie

In diesem Abschnitt soll überprüft werden, welchen Einfluss das numerische Gitter auf den verwendeten CFD-Code bzw. die Ergebnisse hat. Für die Überprüfung wurde der Validierungsfall aus Abschnitt 6.2 verwendet. Für diesen Fall wurden drei numerische Gitter erzeugt, die jeweils das gleiche Problemgebiet abbilden. Dabei unterscheidet sich die Anzahl an Rechenpunkten. Das numerische Gitter mit der geringsten Anzahl an Rechenpunkten (grob) löst das Problemgebiet mit 5900 Rechenpunkten auf. Die zwei weiteren numerischen Gitter haben 8900 (mittel) und ca. 17000 (fein) Rechenpunkte. In Abbildung 5.29 sind Ausschnitte aus den unterschiedlichen numerischen Gittern dargestellt.

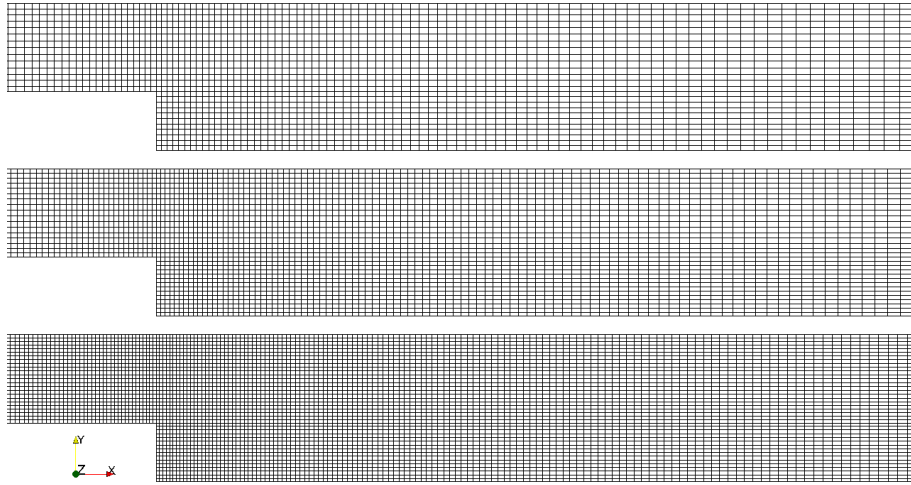


Abbildung 5.29.: Numerische Gitter: grob (oben), mittel (mitte) und fein (unten)

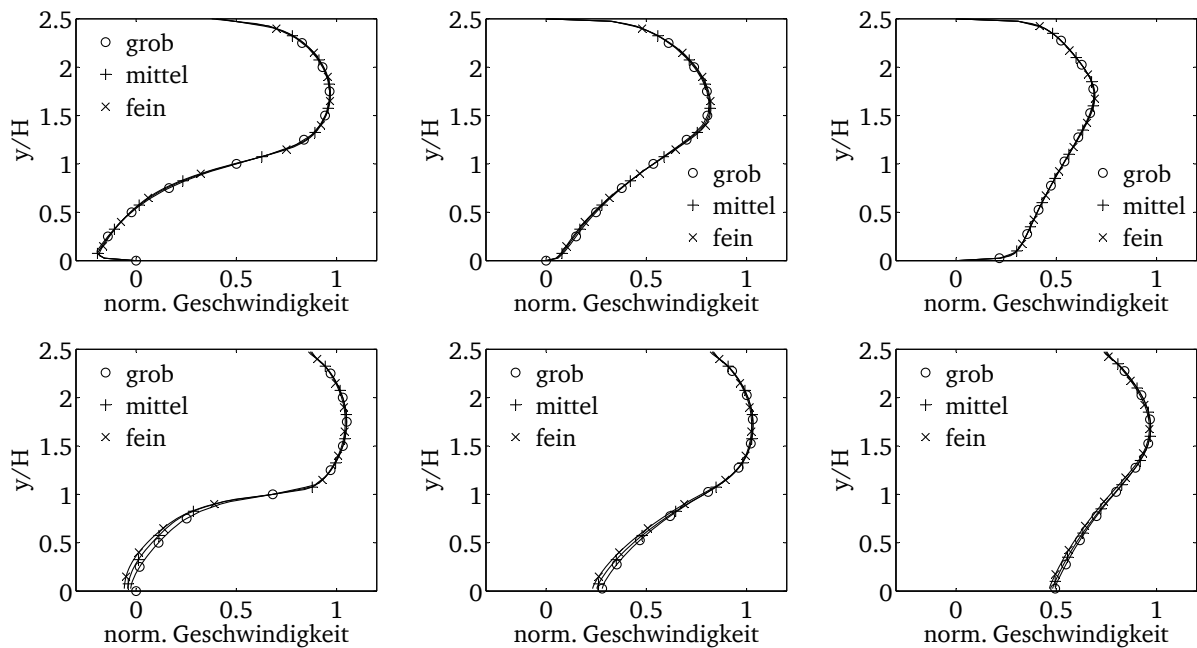


Abbildung 5.30.: Vergleich der mittleren normierten Geschwindigkeiten der kontinuierlichen (oben) und dispersen Phase (unten) aus den Simulationen mit unterschiedlichen numerischen Gittern: $x_1 = 0.0533$ m (links), $x_2 = 0.1867$ m (mitte) und $x_3 = 0.3733$ m nach der Stufe

Für die Simulation wurden für alle Testfälle die gleichen Parameter (Randbedingungen, Diskretisierungsordnungen, etc.) gewählt, um eine Vergleichbarkeit zu gewähr-

leisten. In Abbildung 5.30 sind für den Vergleich mittlere Geschwindigkeiten der kontinuierlichen und dispersen Phase an unterschiedlichen Positionen an den Stellen $x_1 = 0.0533 \text{ m}$, $x_2 = 0.1867 \text{ m}$ und $x_3 = 0.3733 \text{ m}$ nach der Stufe gezeigt. Dabei sind die Geschwindigkeiten normiert mit der Geschwindigkeit $U_0 = 10.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Der Vergleich zeigt minimale Unterschiede bei den mittleren Geschwindigkeiten der kontinuierlichen Phase an allen drei Positionen. Bei den mittleren Geschwindigkeiten der dispersen Phase ist zu beobachten, dass der Unterschied bei $\frac{y}{H} < 1$ größer ist als in den Bereichen $\frac{y}{H} \geq 1$. Eine mögliche Erklärung ist die Verteilung der dispersen Phase. Im Bereich $\frac{y}{H} < 1$ halten sich sehr wenige Partikel auf und der Volumenanteil der dispersen Phase ist sehr klein. Dadurch können die Geschwindigkeiten stärker abweichen. Bestärkt wird diese Erklärung dadurch, dass an der Stelle x_3 der Volumenteil der dispersen Phase steigt und die Unterschiede in den mittleren Geschwindigkeiten der dispersen Phase kleiner werden. Aus diesem Vergleich ist festzuhalten, dass eine Änderung der Auflösung des Problemgebiets keinen größeren Einfluss auf die Ergebnisse hat.

6 Anwendung der Methoden und Modelle

Im Rahmen dieser Arbeit wurden Methoden und Modelle ausgewählt und implementiert, die in den vorangegangenen Kapitel (2 - 4) vorgestellt wurden. Diese Methoden und Modelle sollen reale zweiphasige Systeme abbilden. In diesem Kapitel werden ausgewählte experimentelle Untersuchungen vorgestellt, die mit den gezeigten Methoden simuliert wurden. Die Ergebnisse aus den Simulationen dieser Arbeit werden mit den vorliegenden experimentellen Ergebnissen verglichen und diskutiert. In den Abschnitten 6.1-6.3 werden zur Validierung der Multi-Fluid-Methode mit festen Partikeln beladene Systeme untersucht. Anschließend wird in Abschnitt 6.4 zur Validierung der DQMOM gekoppelt mit der Multi-Fluid-Methode ein Experiment mit verdampfenden Tropfen simuliert.

6.1 Turbulente Kanalströmung

Zur Anwendung und Validierung der Multi-Fluid-Methode wurden zunächst einfache zweiphasige experimentelle Untersuchungen ausgewählt, deren Komplexität eine einfache numerische Abbildung als zweidimensionale Systeme zulässt. Dies ist dann möglich, wenn beispielsweise das Problemgebiet in der dritten Raumrichtung so groß gewählt ist, dass Einflussfaktoren in diese Raumrichtung (z. B. Wände) minimiert und in den Simulationen vernachlässigt werden können. Validierungsfälle, die diese Bedingungen erfüllen, wurden in [46] mit der Untersuchung einer partikelbeladenen, turbulent ausgebildeten Kanalströmung durchgeführt und in [21] mit einer partikelbeladenen, turbulenten Stufenströmung. Letztere wurde z. B. in den Arbeiten [63, 64] für Validierungsrechnungen der Two-Fluid-Methode verwendet.

6.1.1 Beschreibung des Experiments und der Simulation

In Abbildung 6.1 ist der schematische Aufbau des Experiments zu sehen. Die untersuchte Geometrie ist ein Kanal, der so ausgerichtet ist, dass die Richtung der Hauptströmung und die Wirkrichtung der Gravitation gleich sind. Die Länge des Kanals

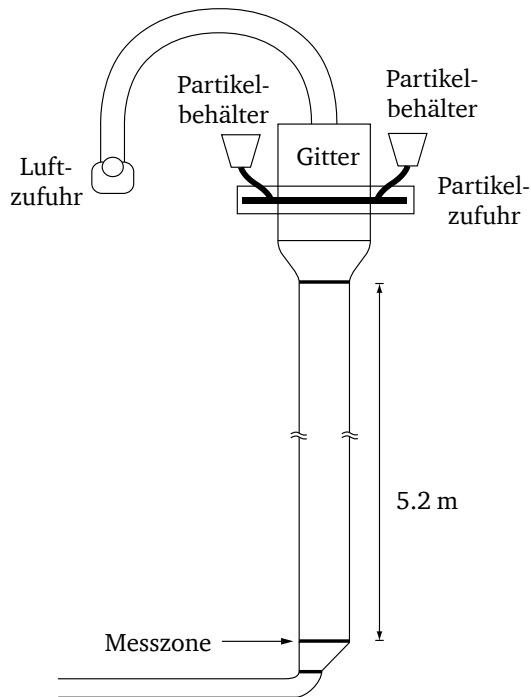


Abbildung 6.1.: Schematische Darstellung des Experiments einer turbulenten Kanalströmung

gewährleistet am Messort eine voll ausgeprägte Strömung und ein Gleichgewicht zwischen den Widerstandskräften und der Gravitationskraft (keine weitere Beschleunigung der Partikel). Die Zuführung der Partikel ist auf eine gleichmäßige Verteilung der Partikel über den Kanaleinlass ausgelegt. Der Kanal hat eine Länge von $l = 5.2\text{ m}$, eine Höhe von $h = 0.04\text{ m}$ und eine Breite von $b = 0.457\text{ m}$. Das Medium der Trägerströmung bzw. der kontinuierlichen Phase ist Luft. Die sich einstellende Reynoldszahl beträgt $Re = 13800$ bezogen auf die halbe Kanalhöhe $h/2 = 0.02\text{ m}$ und mit der Geschwindigkeit $U_0 = 10.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ auf der Mittellinie des Kanals. Die Geschwindigkeiten und Fluktuationen der kontinuierlichen und dispersen Phase wurden am Kanalaustritt über die LDA (Laser Doppler Anemometrie) ermittelt. Als disperse Phase wurden drei unterschiedliche Klassen an sphärischen Partikeln verwendet. Diese sind in Tabelle 6.1 aufgeführt.

Für die Simulation der drei Testfälle wurde ein zweidimensionales Rechengitter erzeugt, welches den kompletten Kanal (Länge und Höhe) abbildet. Das Gitter hat ca. 10000 Zellen und der maximale Abstand des ersten Rechenpunktes zur Wand beträgt $y = 1\text{ mm}$. Für die Luft wurde eine Dichte von $\rho_g = 1.188 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ angenommen. Die Gravitation mit $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ wirkt in Hauptströmungsrichtung. Für den Kanaleintritt wurden für die kontinuierliche und disperse Phase die gleiche Eintrittsgeschwindigkeit als

Blockprofil gewählt. Die disperse Phase wurde über eine Normalverteilung mit den Parametern in Tabelle 6.1 abgebildet. Über den PD-Algorithmus wurden drei Durchmesser und Wichtungen bestimmt, die als Eintrittsrandbedingung für die disperse Phase verwendet wurden.

Tabelle 6.1.: Eigenschaften der dispersen Phase

Testfall	V1	V2	V3
Material	Kupfer	Glas	Glas
Dichte ($\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$)	8800	2500	2500
mittlerer Durchmesser (μm)	70	50	90
Standardabweichung (μm)	10.9	3.9	4.5
Beladung Z	0.1	0.1	0.1

Für die Simulation des turbulenten Kanals wurden folgende Modelle verwendet:

- Widerstandskräfte modelliert nach Schiller-Naumann
- Turbulenz der kontinuierlichen Phase über das k - ε Modell nach Hill
- Fluktuationen der dispersen Phase nach Politis

6.1.2 Ergebnisse

Die Ergebnisse aus der Simulation und den experimentellen Ergebnissen sind in den Abbildungen 6.2-6.4 gegenübergestellt. Verglichen werden die mittleren Geschwindigkeiten der kontinuierlichen und dispersen Phase in Hauptströmungsrichtung am Ende des Kanals. Weiter werden die Fluktuationen beider Phasen am Ende des Kanals verglichen. Die Fluktuationen der kontinuierlichen Phase u'_c ergeben sich aus der turbulenten kinetischen Energie k über

$$u'_c = \sqrt{\frac{2}{3}k} \quad (6.1)$$

und die Fluktuationen der dispersen Phase ergeben sich aus den Fluktuationen der kontinuierlichen Phase und dem Koeffizienten C_t aus dem Modell von Politis (2.50)

$$u'_d = C_t u'_c. \quad (6.2)$$

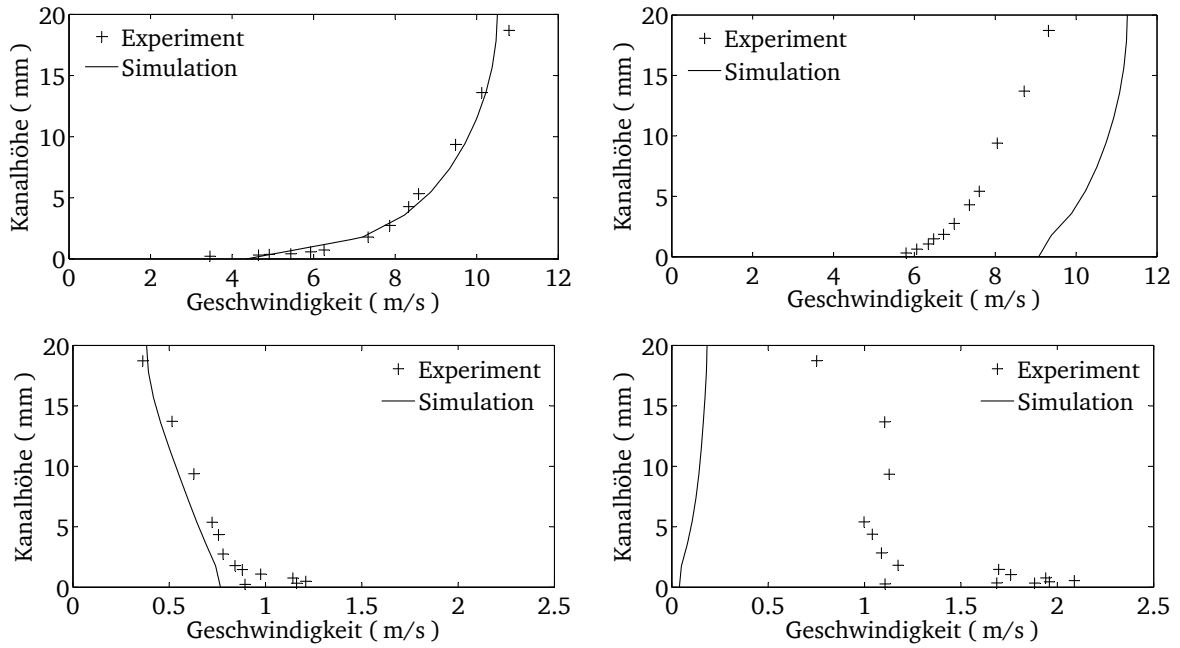


Abbildung 6.2.: Vergleich der Ergebnisse Testfall V1: mittlere Geschwindigkeiten (oben), Fluktuationen (unten) und kontinuierliche Phase (links), disperse Phase (rechts)

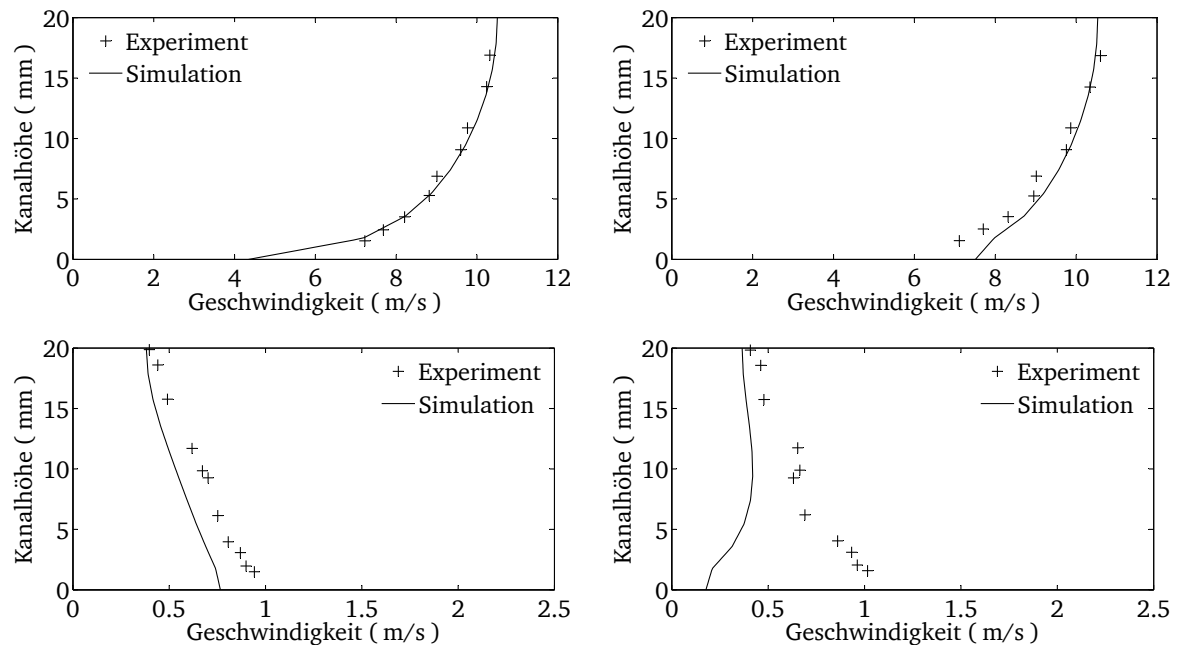


Abbildung 6.3.: Vergleich der Ergebnisse Testfall V2: mittlere Geschwindigkeiten (oben), Fluktuationen (unten) und kontinuierliche Phase (links), disperse Phase (rechts)

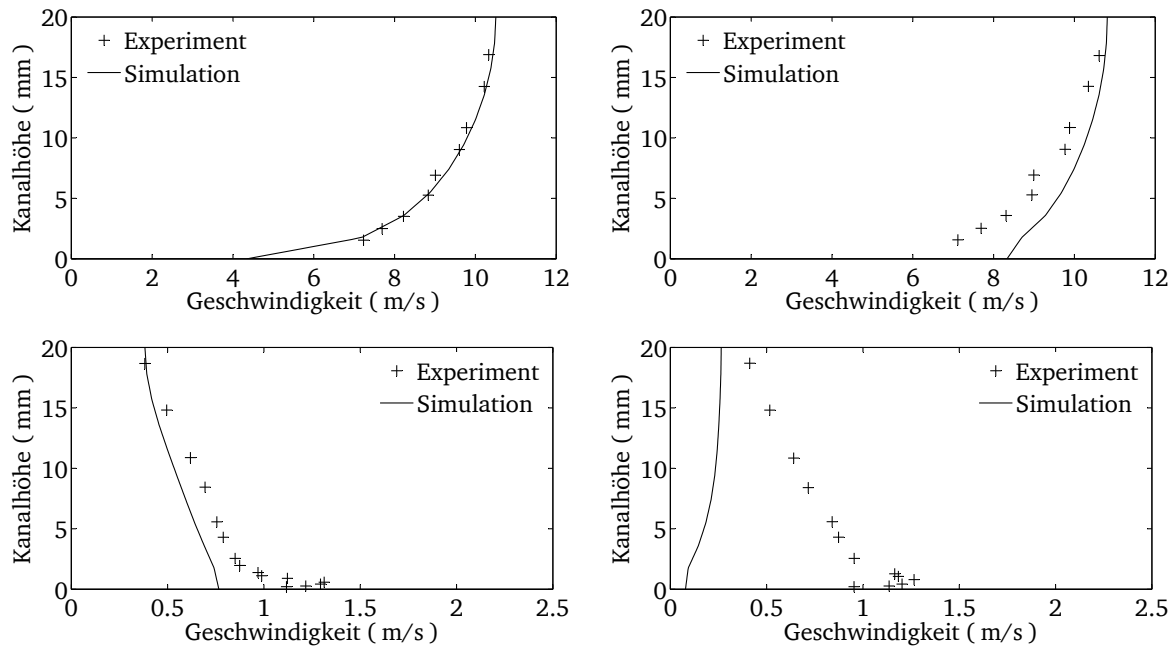


Abbildung 6.4.: Vergleich der Ergebnisse Testfall V3: mittlere Geschwindigkeiten (oben), Fluktuationen (unten) und kontinuierliche Phase (links), disperse Phase (rechts)

Der Vergleich der mittleren Geschwindigkeiten der Gasphase zeigt für alle Fälle (V1, V2 und V3) eine sehr gute Übereinstimmung. An der Wand müsste die mittlere Geschwindigkeit der kontinuierlichen Phase, aufgrund der Haftbedingung gegen Null gehen. Der zu beobachtende Unterschied wird durch die Interpolationsroutine des Auswertungsprogramms verursacht. Die mittleren Geschwindigkeiten der dispersen Phase werden, ausgenommen von Fall V1, ebenfalls gut wiedergegeben. In [46] wird erwähnt, dass die experimentellen Ergebnisse von Fall V1 schwer nachzuvollziehen sind, da eine höhere mittlere Geschwindigkeit der Kupferpartikel zu erwarten gewesen wäre. Für die Fälle V2 und V3 ist zu beobachten, dass die simulierten Geschwindigkeitsprofile der dispersen Phase, im Gegensatz zu den experimentell ermittelten Geschwindigkeitsprofilen, eine weniger ausgeprägte Krümmung aufweisen. Dies führt dazu, dass an der Wand die mittlere Geschwindigkeit der Partikel leicht überschätzt wird. Die Fluktuationen der kontinuierlichen Phase können über das verwendete Turbulenzmodell gut wiedergegeben werden. Es ist zu beobachten, dass die Fluktuationen generell über die gesamte Kanalhöhe unterschätzt werden. Dies kann man dadurch begründen, dass in dem verwendeten Turbulenzmodell eine Annahme isotroper Turbulenz steckt und somit in Hauptströmungsrichtung die Fluktuationen für gewöhnlich unterschätzt werden [30]. Das Modell für die Fluktuationen der dispersen Phase unterschätzt die experi-

mentell bestimmten Fluktuationen sehr stark und zeigt, dass das Modell von Politis nicht allgemeingültig ist. Der Vergleich zwischen den experimentell ermittelten Fluktuationen der kontinuierlichen und der dispersen Phase weist eine starke Korrelation auf. In den Arbeiten [85] und [30] wurde eine Korrektur für die Bestimmung für Partikelfluktuationen u'_d vorgeschlagen

$$u'_{d,korr.} = u'_c + u'_d e^{\frac{\tau_f}{\tau_p}}, \quad (6.3)$$

wobei τ_f das integrale Zeitmaß und τ_p die Partikelrelaxationszeit ist. Die Ergebnisse für die korrigierten Fluktuationen der Partikel im Vergleich zu den gemessenen Partikelfluktuationen sind in Abbildung 6.5 zu sehen. Die vorgeschlagene Korrektur zeigt, dass die Wiedergabe deutlich verbessert werden kann. Anzumerken ist, dass die korrigierten Fluktuationen der Partikel nicht für die Bestimmung der mittleren Geschwindigkeiten verwendet werden.

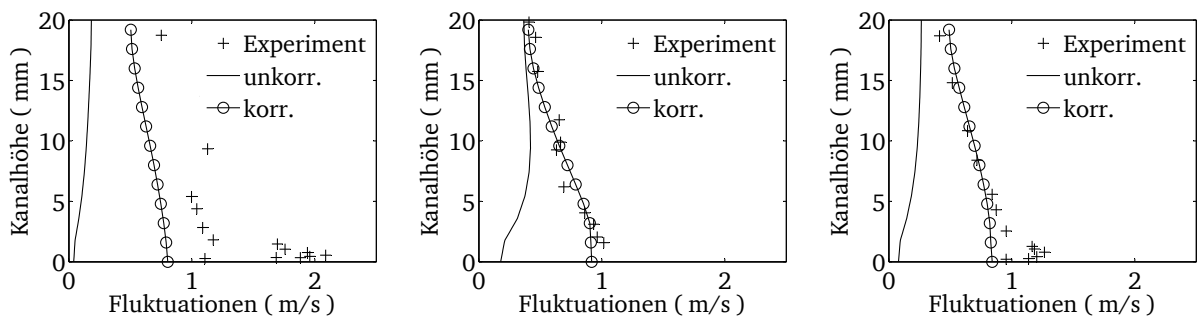


Abbildung 6.5.: Nicht korrigierte und korrigierte Fluktuationen der dispersen Phase: V1 (links), V2 (mitte) und V3 (rechts)

6.2 Turbulente Stufenströmung

6.2.1 Beschreibung des Experiments und der Simulation

Dieser Validierungsfall basiert auf dem Aufbau der experimentellen Untersuchungen an einer turbulenten Kanalströmung [21]. Zur Untersuchung einer partikelbeladenen Stufenströmung wurde am Ende des Kanals eine Stufe angebracht (siehe Abbildung 6.6). Daher wirkt auch in diesem Experiment die Gewichtskraft in Hauptströmungsrichtung. Der umgebende Aufbau bleibt unverändert.

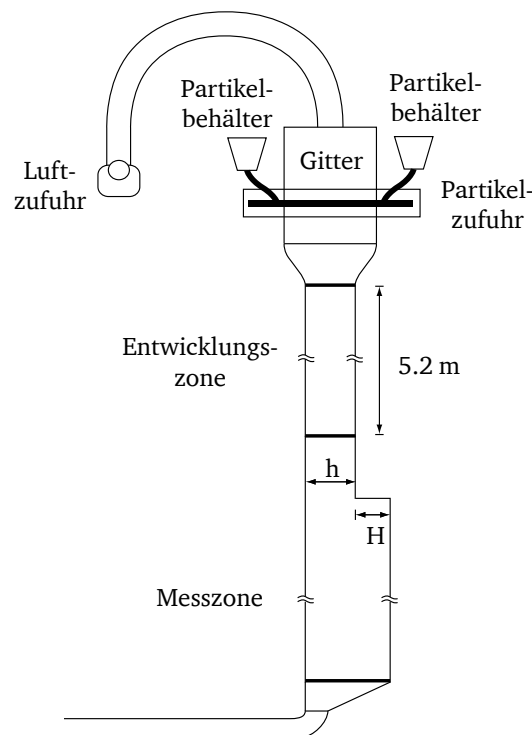


Abbildung 6.6.: Schematische Darstellung des Experiments einer turbulenten Stufenströmung

Die Stufenhöhe H beträgt $2/3$ der Kanalhöhe $h = 0.04\text{ m}$. Die angegebene Reynoldszahl, die sich aus den Größen Stufenhöhe $H = 0.02667\text{ m}$ und der Geschwindigkeit $U_0 = 10.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ auf der Mittellinie des vorgeschalteten Kanals ergibt, beträgt $Re = 18400$. Durch die unterschiedlichen Klassen der dispersen Phase (siehe Tabelle 6.2) ergeben sich bei diesem Experiment drei zu betrachtende Fälle.

Tabelle 6.2.: Eigenschaften der dispersen Phase

Testfall	V4	V5	V6
Material	Kupfer	Glas	Glas
Dichte ($\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$)	8800	2500	2500
mittlerer Durchmesser (μm)	70	150	150
Standardabweichung (μm)	10.9	10.0	10.0
Beladung Z	0.1	0.2	0.4

In der Messzone wurden an unterschiedlichen Positionen nach der Stufe die mittleren Geschwindigkeiten und Fluktuationen ermittelt. An folgenden Positionen liegen experimentelle Daten für die einzelnen Fälle vor:

- Messpositionen $\frac{x}{H} = 2, 5, 7, 9$, und 12 für den Fall V4
- Messpositionen $\frac{x}{H} = 2, 5, 7, 9$, und 14 für den Fall V5
- Messpositionen $\frac{x}{H} = 2, 5, 7, 9$, und 14 für den Fall V6

Für die Simulation dieser Validierungsfälle wurden die gleichen Modelle, Methoden und Randbedingungen verwendet wie in Abschnitt 6.1. Unterschiede ergeben sich in den Randbedingungen der dispersen Phase aus den vorgegebenen Eigenschaften in Tabelle 6.2. Auch für diesen Fall sind die Voraussetzungen gegeben (siehe Abschnitt 6.1), dass die untersuchte Geometrie über ein zweidimensionales numerisches Gitter abgebildet werden kann. Das verwendete Gitter besteht aus ca. 17000 Kontrollvolumen. Ein Ausschnitt aus dem numerischen Gitter ist in Abschnitt 5.3 zu sehen (siehe Abbildung 5.29).

6.2.2 Ergebnisse

In den folgenden Abbildungen ist der Vergleich aus den experimentellen Untersuchungen und den Simulationen zu sehen. Es werden die mittleren Geschwindigkeiten und Fluktuationen der kontinuierlichen und dispersen Phase verglichen. Dabei sind diese Größen mit der Geschwindigkeit $U_0 = 10.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ normiert. Die Kanalhöhe wird mit der Stufenhöhe H zu $\frac{y}{H}$ normiert.

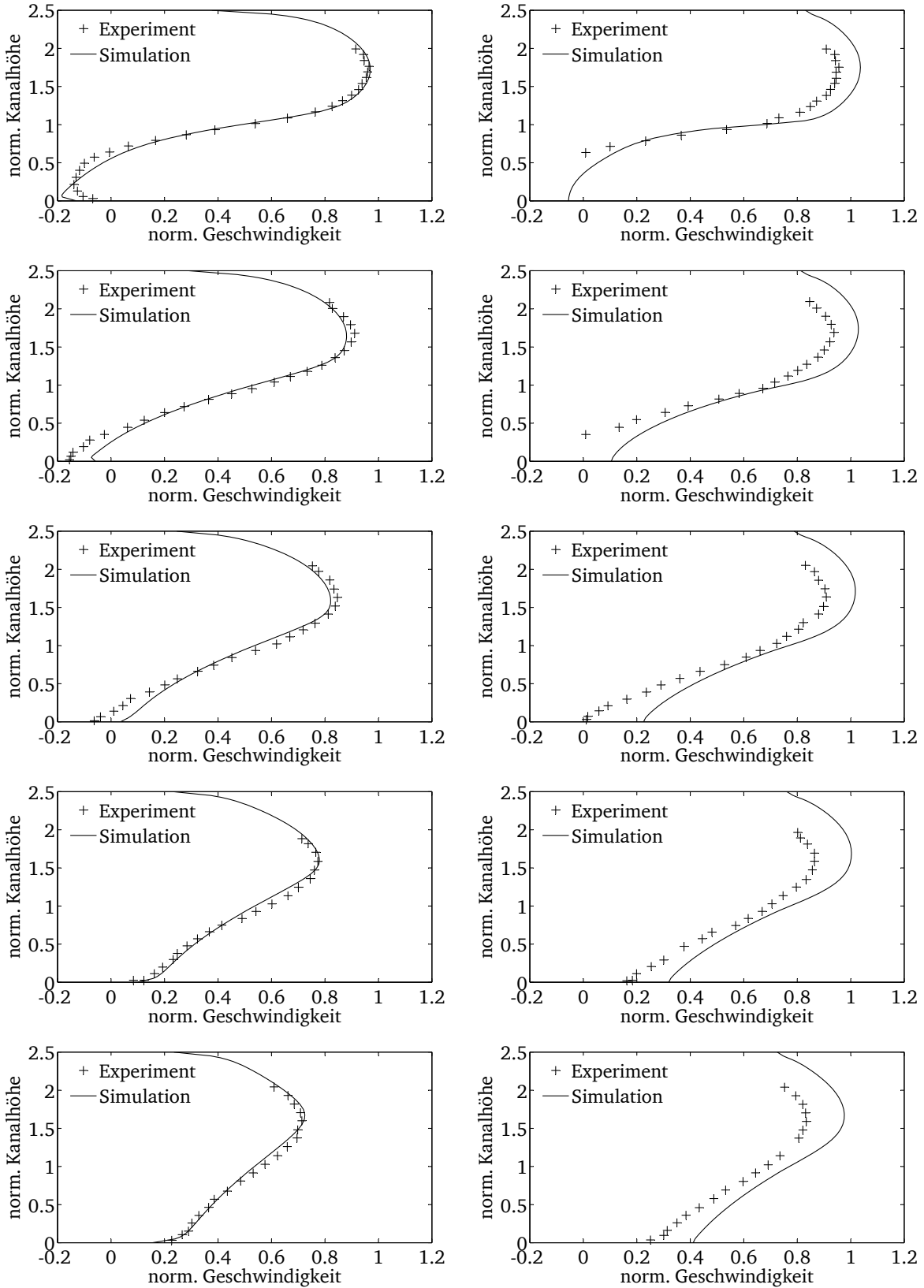


Abbildung 6.7.: Vergleich der mittleren Geschwindigkeiten der kontinuierlichen Phase (links) und der dispersen Phase (rechts). Von oben nach unten Messpositionen : x_2 , x_5 , x_7 , x_9 und x_{12} Testfall V4

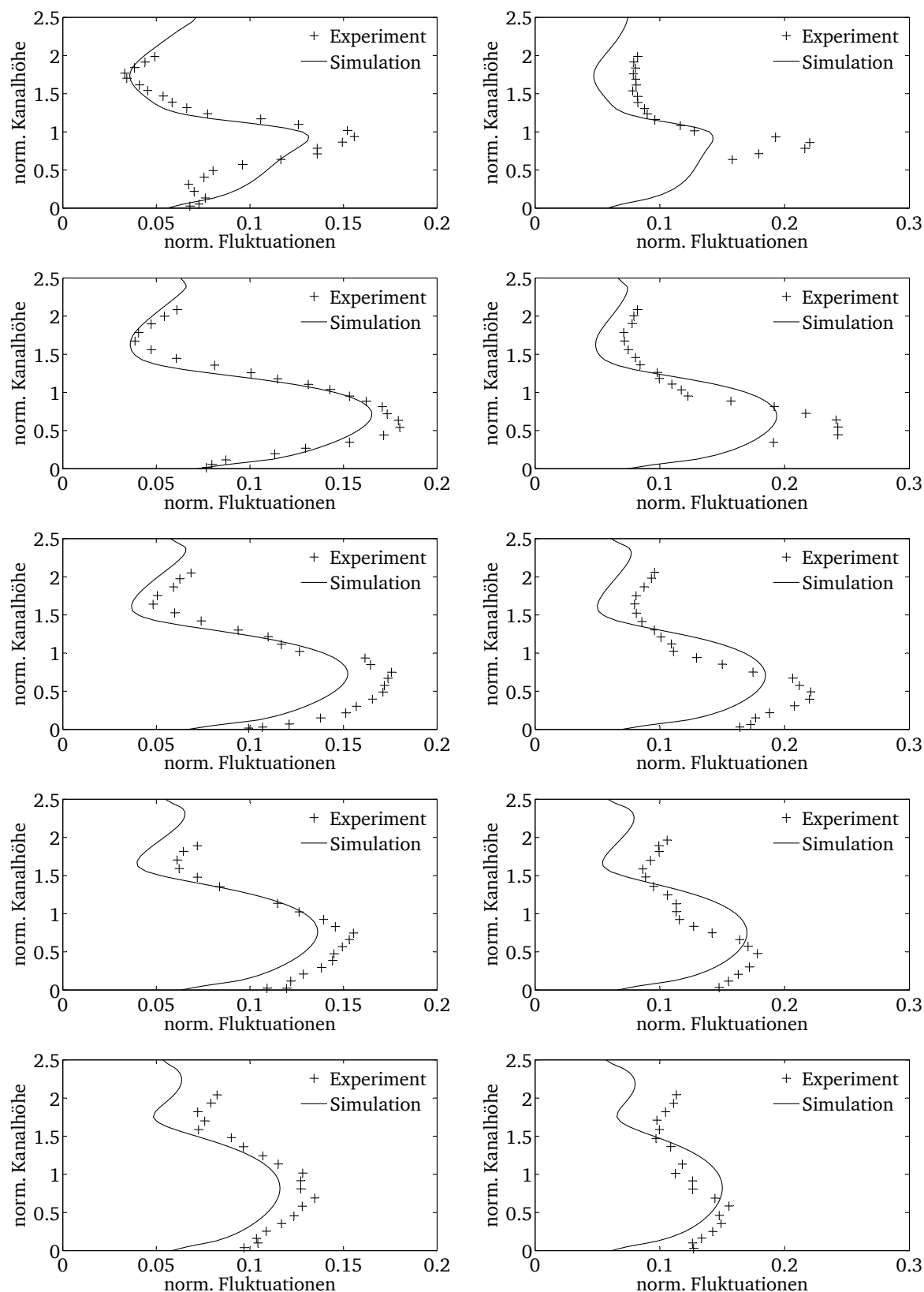


Abbildung 6.8.: Vergleich der Fluktuationen der kontinuierlichen Phase (links) und der dispersen Phase (rechts). Von oben nach unten Messpositionen : x_2 , x_5 , x_7 , x_9 und x_{12} Testfall V4

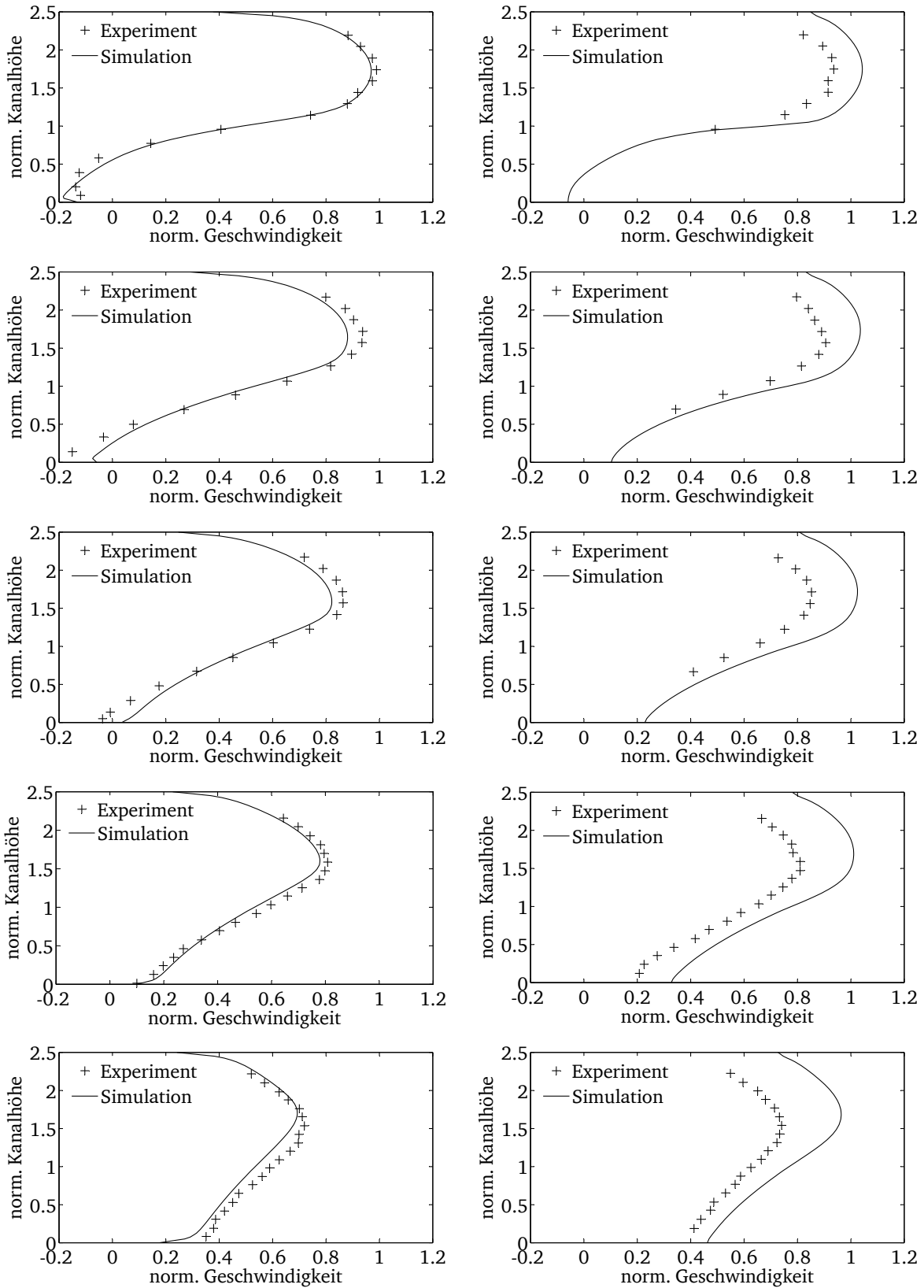


Abbildung 6.9.: Vergleich der mittleren Geschwindigkeiten der kontinuierlichen Phase (links) und der dispersen Phase (rechts). Von oben nach unten Messpositionen : x_2 , x_5 , x_7 , x_9 und x_{14} Testfall V5

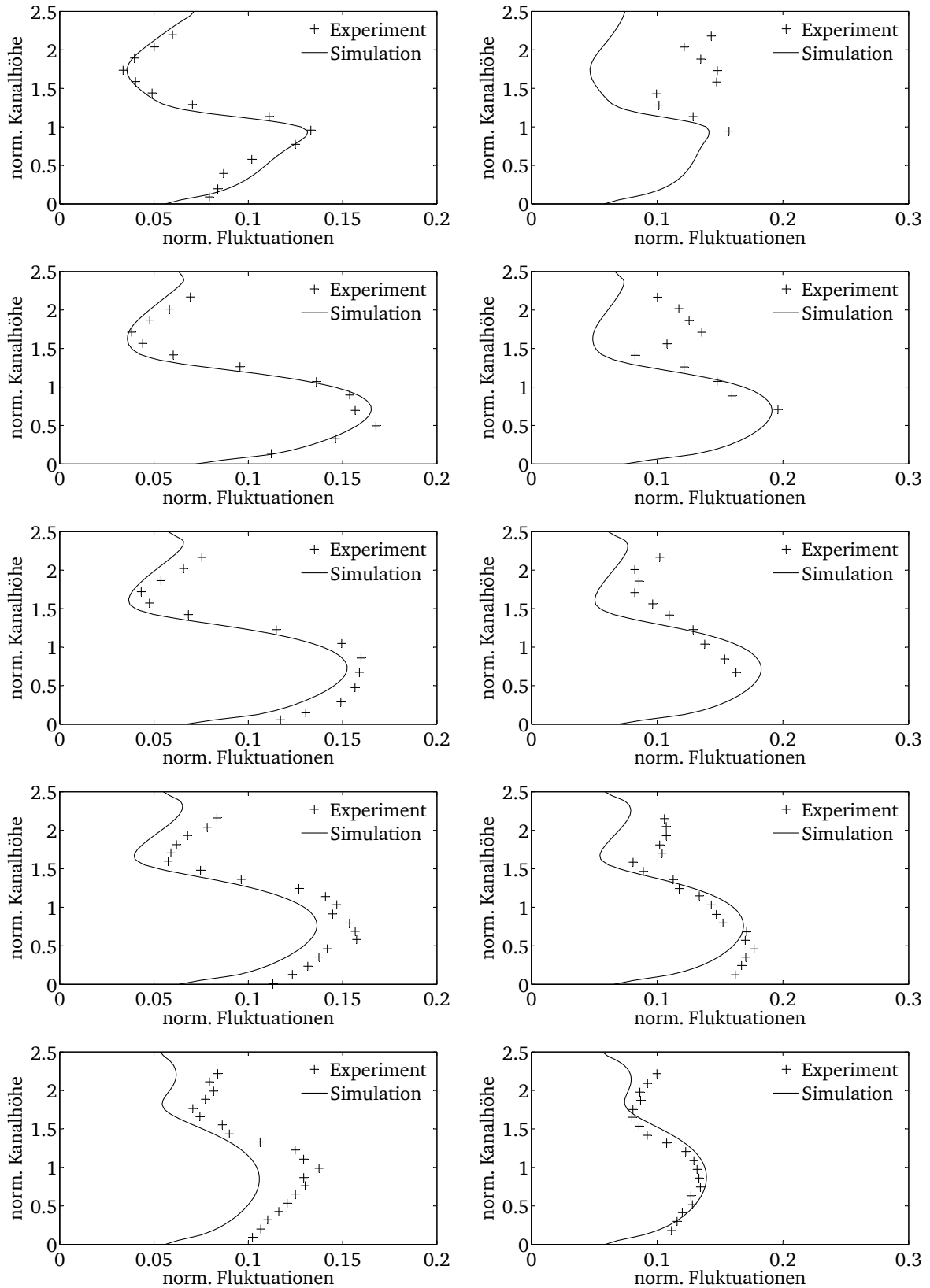


Abbildung 6.10.: Vergleich der Fluktuationen der kontinuierlichen Phase (links) und der dispersen Phase (rechts). Von oben nach unten Messpositionen x_2 , x_5 , x_7 , x_9 und x_{14} Testfall V5

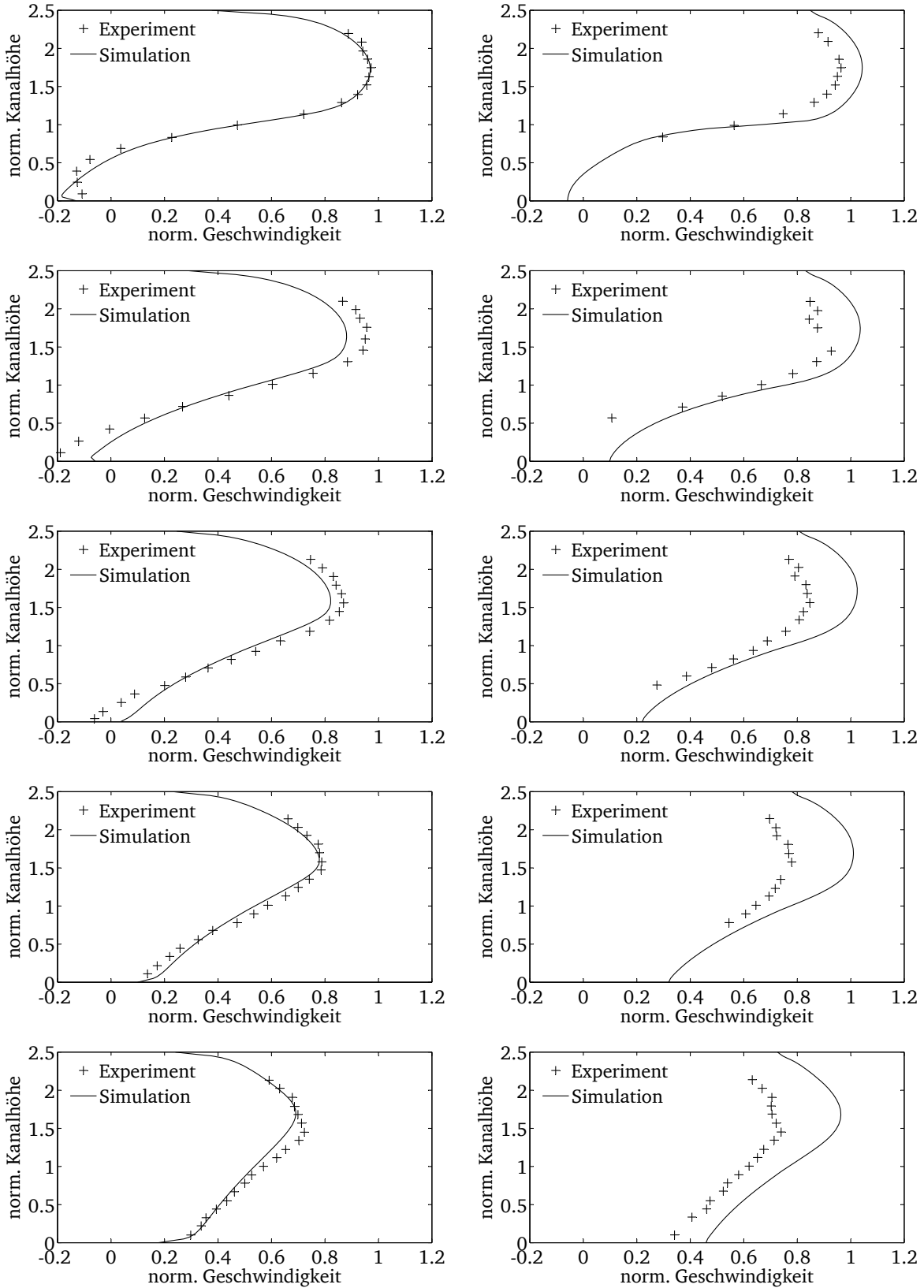


Abbildung 6.11.: Vergleich der mittleren Geschwindigkeiten der kontinuierlichen Phase (links) und der dispersen Phase (rechts). Von oben nach unten Messpositionen : x_2 , x_5 , x_7 , x_9 und x_{14} Testfall V6

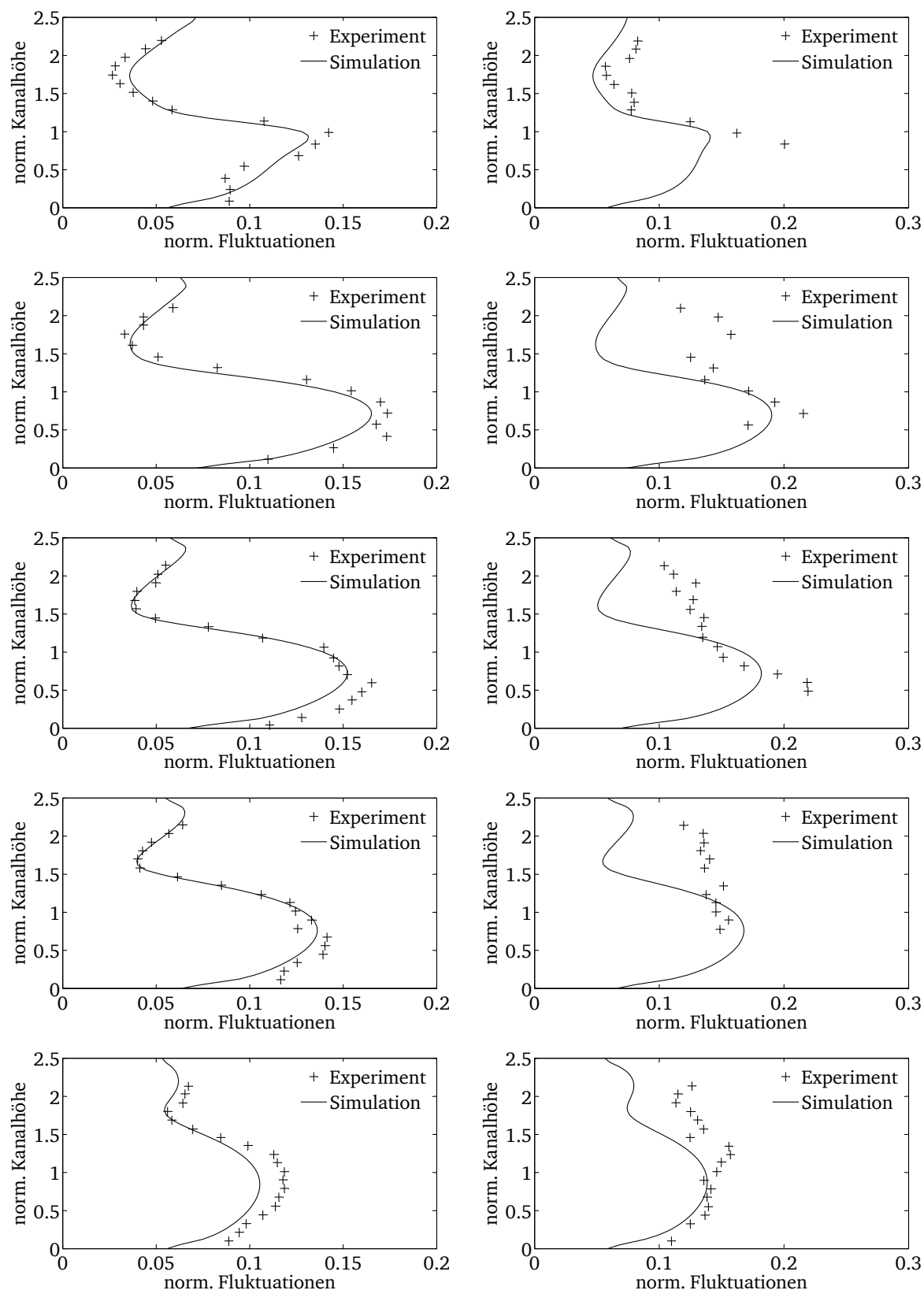


Abbildung 6.12.: Vergleich der Fluktuationen der kontinuierlichen Phase (links) und der dispersen Phase (rechts). Von oben nach unten Messpositionen x_2 , x_5 , x_7 , x_9 und x_{14} Testfall V6

Bei allen drei Fällen (V4-V6) ist zu sehen, dass die mittleren Geschwindigkeiten der kontinuierlichen Phase von der Simulation sehr gut wiedergegeben werden können. Die Größenordnung der Geschwindigkeit sowie die Profile der Geschwindigkeiten werden sehr gut abgebildet. Die Fluktuationen der kontinuierlichen Phase können über das verwendete Turbulenzmodell ebenfalls sehr gut wiedergegeben werden. Die mittleren Geschwindigkeiten der dispersen Phase werden im Vergleich zum Experiment überschätzt. Bereits an der ersten Messposition (x_2) ist eine Überhöhung der mittleren Geschwindigkeit über die komplette Kanalhöhe ($\frac{y}{H}$) zu erkennen, die bis in die letzte Messebene erhalten bleibt. Ein möglicher Grund ist, dass das Gleichgewicht zwischen Gravitation und Widerstandskraft durch die verwendeten Modelle nicht korrekt wiedergegeben werden kann. Trotz der Überhöhung der mittleren Geschwindigkeiten der dispersen Phase, werden die Profile der Geschwindigkeiten in allen Testfällen sehr gut wiedergegeben. Wie bereits in Abschnitt 6.1 zu sehen, unterschätzt das verwendete Modell die Fluktuationen der Partikel sehr stark. Daher sind in den Abbildungen 6.8, 6.10 und 6.12 die korrigierten Partikelfluktuationen gezeigt. Trotz Korrektur werden diese noch teilweise unterschätzt. Aus den Messdaten ist bei den Fluktuationen der Partikel zu erkennen (Fall V4 und V5), dass eine Korrelation mit den Fluktuationen der kontinuierlichen Phase besteht, die in Richtung der letzten Messebene stärker wird. Daher ergibt die Korrektur (6.3) in Richtung der hinteren Messebenen bessere Ergebnisse. Für Fall V6 ist diese Korrelation nicht so deutlich zu erkennen und ist auf die stärkere Beladung zurückzuführen. Die Simulation liefert mittlere Geschwindigkeiten und Fluktuationen in den Messebenen kurz hinter der Stufe bei $\frac{y}{H} < 1$, während aus den Experimenten keine Daten vorliegen, da sich nur sehr wenige Partikel im Bereich der Rezirkulationszone (siehe Abbildung 6.13) aufhalten. Die Multi-Fluid-Methode bestimmt auch in solchen Gebieten mittlere Geschwindigkeiten und Fluktuationen für die disperse Phase. Aufgrund der unterschiedlichen Relaxationszeiten (2.10) sind im Fall V4 bereits Partikel in den Bereichen bei $\frac{y}{H} < 1$ an der Messebene x_2 , während im Fall V5 und V6 erst bei x_5 Partikel bei $\frac{y}{H} < 1$ anzutreffen sind. Insgesamt kann die betrachtete Mehrphasenströmung über die verwendeten Methoden und Modelle gut wiedergegeben werden.

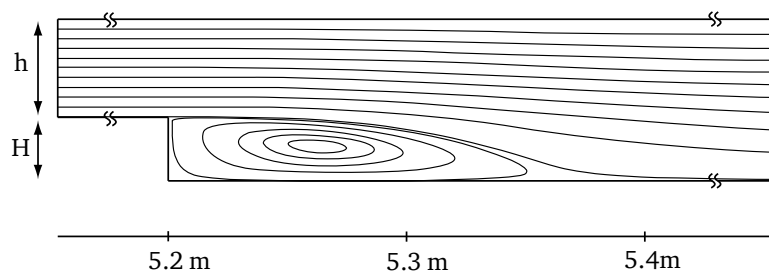


Abbildung 6.13.: Rezirkulationszone aus Fall V5

6.3 Verdrehte Strömung

6.3.1 Beschreibung des Experiments und der Simulation

In Abbildung 6.14 ist der schematische Aufbau der experimentellen Konfiguration von Sommerfeld und Qiu [81] zu sehen.

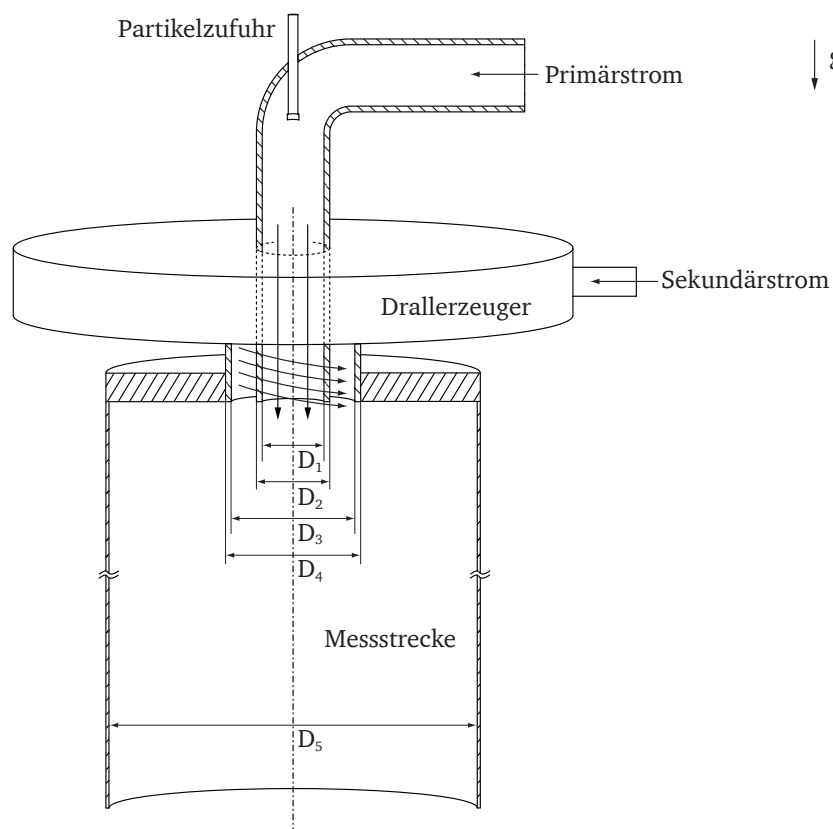


Abbildung 6.14.: Schematische Darstellung des Experiments von Sommerfeld und Qiu

Der Messstrecke werden zwei getrennte Ströme zugeführt. Der Primärstrom besteht aus Luft und über die Partikelzufuhr werden Partikel, deren Größenverteilung in Abbildung 6.15 zu sehen ist, dem Primärstrom beigemischt. Über ein zentrales Rohr mit dem Durchmesser D_1 wird der Primärstrom der Messstrecke mittig zugeführt. Der Sekundärstrom besteht nur aus Luft und wird zunächst im Drallerzeuger verdreht. Über den Ringspalt (zwischen D_2 und D_3) wird der Sekundärstrom coaxial zum Primärstrom

der Messstrecke zugeführt. Dabei wird für die Drallzahl S folgende Definition angegeben

$$S = \frac{2 \int_0^{D_3/2} \rho u w r^2 dr}{D_5 \int_0^{D_3/2} \rho u^2 r dr}, \quad (6.4)$$

wobei u für die axiale und w für die tangentielle Geschwindigkeit stehen. Die weiteren Eigenschaften der Konfiguration sind in Tabelle 6.3 zusammengefasst. Für die Ermittlung der experimentellen Daten wurde die Phasen-Doppler-Anemometrie (PDA) verwendet. Die Messungen für die kontinuierliche und die disperse Phase wurden zeitgleich durchgeführt. Damit eine Trennung bei einer gleichzeitigen Messung beider Phasen möglich ist, wurde die Größeninformation aus der PDA genutzt. Dazu wurden Glaspartikel mit einem maximalen Durchmesser $4\mu\text{m}$ verwendet um die Geschwindigkeiten der kontinuierlichen Phase zu ermitteln. Aus den experimentellen Untersuchungen liegen Daten an sieben Messebenen (x_1 - x_7) normal zur Rotationsachse vor, die in Abbildung 6.16 dargestellt sind.

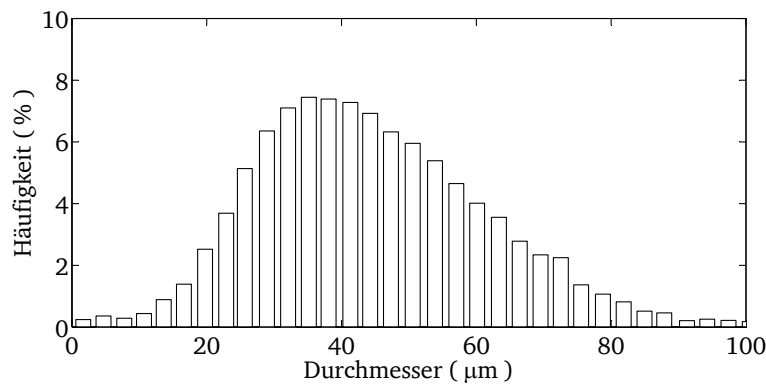


Abbildung 6.15.: Verteilung der Partikel aus dem Experiment von Sommerfeld und Qiu

Für die Simulation wurde ein Teil der Messstrecke und ein Teil des Einstromes über ein dreidimensionales numerisches Gitter abgebildet. Insgesamt besteht das numerische Gitter aus ca. 224000 Kontrollvolumen. In Abbildung 6.16 ist eine Schnittfläche des numerischen Problemgebietes gezeigt. Die numerisch abgebildete Länge der Messstrecke beträgt 0.75 m. Die Turbulenz der kontinuierlichen Phase bildet das implementierte Turbulenzmodell (k - ϵ) ab. Die Glaspartikel und deren Verteilung, wurden über eine logarithmische Normalverteilung mit den Parametern $d_m = 45.5\mu\text{m}$ und $\sigma = 0.275$ abgebildet. Der PD-Algorithmus diente zur Bestimmung für die Randbedingungen der dispersen Phase, die über drei zusätzliche Multi-Fluid-Phasen abgebildet wurden. Dabei musste zur Abbildung des Experiments die Gravitation, die Widerstandskräfte auf die disperse Phase und die Rückwirkung auf die kontinuierliche Phase berücksichtigt werden. Für die Einstromränder wurden jeweils Blockprofile für die Geschwindigkeit der

kontinuierlichen und dispersen Phase gewählt. Für die Randbedingungen der dispersen Phase diente die Annahme, dass eine gleichmäßige Verteilung der Glaspartikel über den Einlass des Primärstroms und an jedem Punkt der Einstromfläche die Verteilung aus Abbildung 6.15 vorliegt.

Tabelle 6.3.: Eigenschaften der Konfiguration von Sommerfeld und Qiu

Kontinuierliche Phase		
Primärer Massenstrom	0.0099	($\frac{\text{kg}}{\text{s}}$)
Sekundärer Massenstrom	0.0383	($\frac{\text{kg}}{\text{s}}$)
Reynoldszahl Re_{D_3}	52400	(–)
Drallzahl S	0.47	(–)
Disperse Phase		
mittlerer Durchmesser	45.5	(μm)
Dichte (Glas)	2500	($\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$)
Massenstrom	0.00034	($\frac{\text{kg}}{\text{s}}$)
Beladung Z	0.034	(–)
Geometrie		
D_1	0.032	(m)
D_2	0.038	(m)
D_3	0.064	(m)
D_4	0.070	(m)
D_5	0.194	(m)

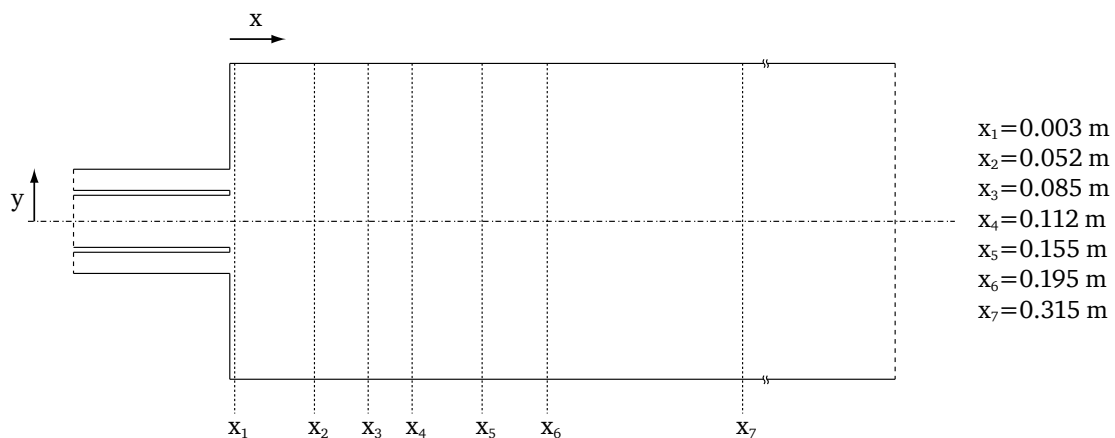


Abbildung 6.16.: Schnittansicht des numerischen Problemgebietes mit den Messebenen

6.3.2 Ergebnisse

In den folgenden Abbildungen 6.17-6.20 ist der Vergleich zwischen den Ergebnissen aus dem Experiment und der Simulation an den sieben Messebenen zu sehen. Dabei sind alle Geschwindigkeiten und Fluktuationen mit der maximalen mittleren Geschwindigkeit in axialer Richtung (u_0) normiert. Die gezeigten Größen der dispersen Phase aus der Simulation ergeben sich aus einer Mittelung über alle Partikel. Zum Vergleich mit den experimentellen Daten werden die Geschwindigkeiten der kleinsten (+) und größten (o) vermessenen Partikel gezeigt. Der Vergleich zeigt, dass die mittleren Geschwindigkeiten der kontinuierlichen und der dispersen Phase zufriedenstellend wiedergegeben werden. Dabei fallen die Messebenen x_2 bis x_4 durch größere Abweichungen zu den experimentellen Ergebnissen auf und es ist zu erkennen, dass eine geringere Eindringtiefe des Primärstroms und eine stärkere Aufweitung des Sekundärstroms durch die Simulation vorhergesagt und die Rezirkulation in ihrer Stärke und Position nicht korrekt abgebildet wird. Generell ist mit dem verwendeten Turbulenzmodell die Abbildung solcher Strömungen schwierig. Dies geht auch aus der Arbeit [69] hervor. Dabei wird bei achsensymmetrischen Freistrahlen die Aufweitung überschätzt. Da die Bewegung der dispersen Phase maßgeblich durch die der kontinuierlichen Phase beeinflusst wird (Widerstandskräfte), ist ebenfalls in den Messebenen x_2 bis x_4 eine Abweichung der Ergebnisse der dispersen Phase zu erkennen. Die Glaspartikel können in der Simulation nicht so tief in die Messtrecke eindringen, wie es aus den experimentellen Ergebnissen zu erwarten wäre. Durch die Strömung der kontinuierlichen Phase werden die Glaspartikel stärker abgebremst und eine Folge ist, dass die Glaspartikel weiter nach außen getragen werden. An den weiteren Messebenen x_5 - x_7 werden die mittleren Geschwindigkeiten aus dem Experiment von der Simulation gut getroffen. Ein Vergleich der Fluktuationen ist schwierig. Die Verwendung des k - ε -Modells beinhaltet die Annahme isotroper Turbulenz. Dies bedeutet, dass die Fluktuationen in allen Richtungen den gleichen Betrag haben. Aus den experimentellen Daten ist zu erkennen, dass diese Annahme nicht vollständig gerechtfertigt ist. Zum Vergleich wurde aus den experimentell ermittelten Fluktuationen (u_{rms} , v_{rms} und w_{rms}) die turbulente kinetische Energie (TKE) bestimmt. In Abbildung 6.20 ist der Vergleich der TKE für die kontinuierliche und die disperse Phase gezeigt. Dabei sind die Werte mit u_0^2 normiert. Im Vergleich ist bereits bei der ersten Messebene zu sehen, dass in der Simulation die TKE vor allem des Primärstroms stark unterschätzt wird. Eine Änderung der Randbedingung für die TKE und ihrer Dissipation konnte dies nicht verbessern. In den Messebenen x_2 - x_4 wird die TKE noch unterschätzt, dabei können die Profile ansatzweise abgebildet werden. In den hinteren Messebenen x_5 - x_7 zeigt der Vergleich, dass die Simulation die experimentellen Ergebnisse gut abbilden kann.

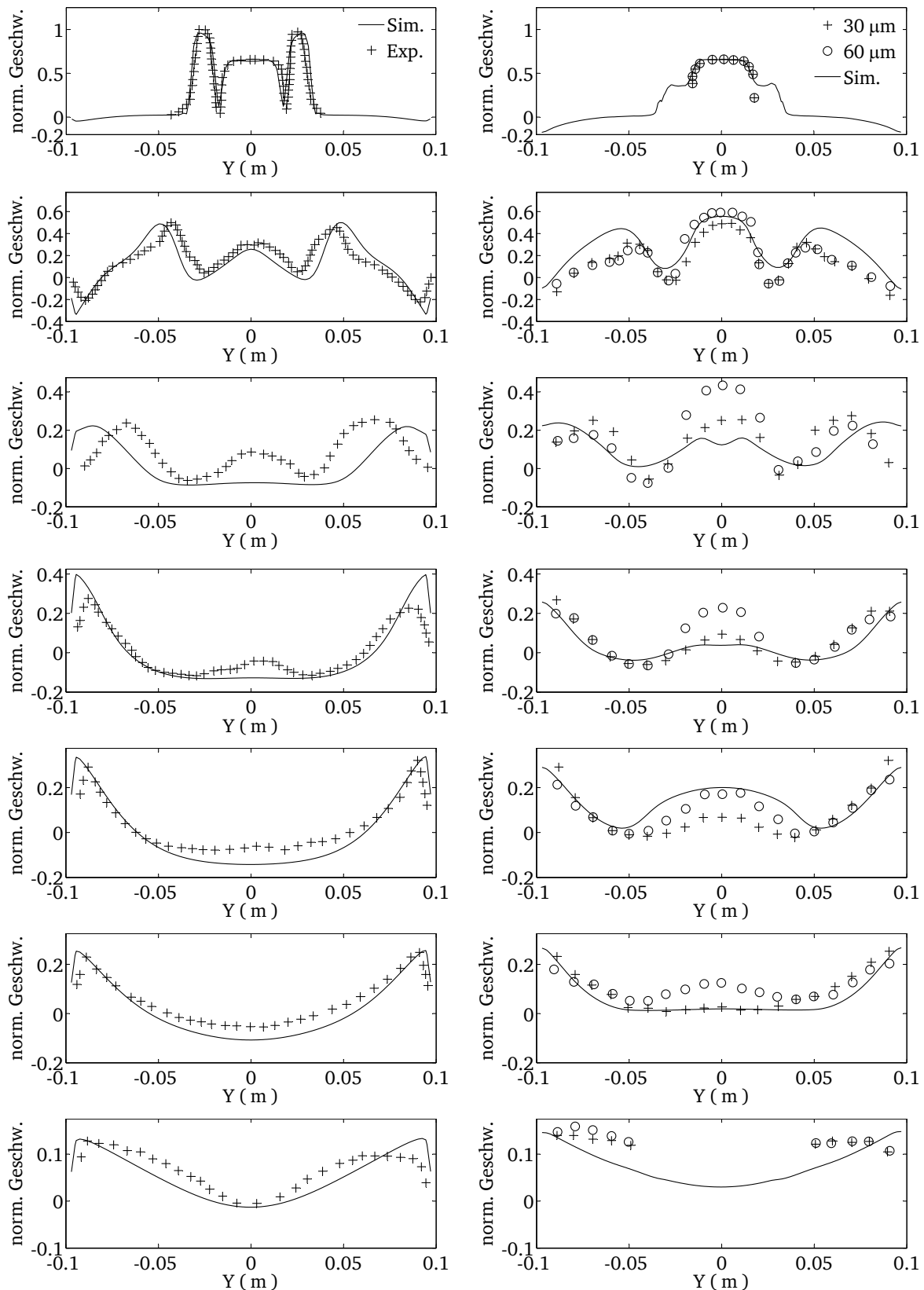


Abbildung 6.17.: Vergleich der mittleren axialen Geschwindigkeiten der kontinuierlichen Phase (links) und der dispersen Phase (rechts). Von oben nach unten Messpositionen : x_1 - x_7

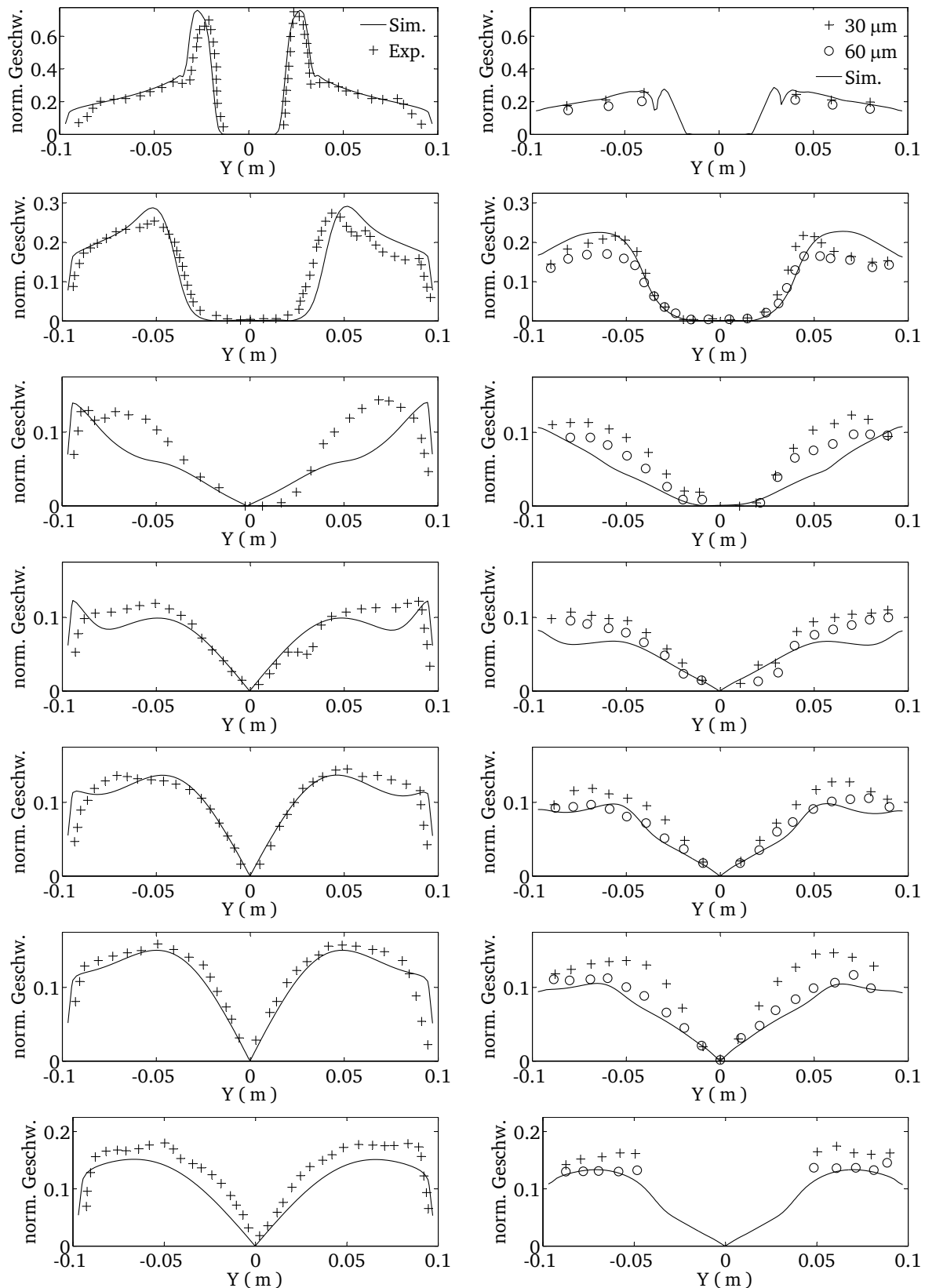


Abbildung 6.18.: Vergleich der mittleren tangentialen Geschwindigkeiten der kontinuierlichen Phase (links) und der dispersen Phase (rechts). Von oben nach unten Messpositionen : x_1 - x_7

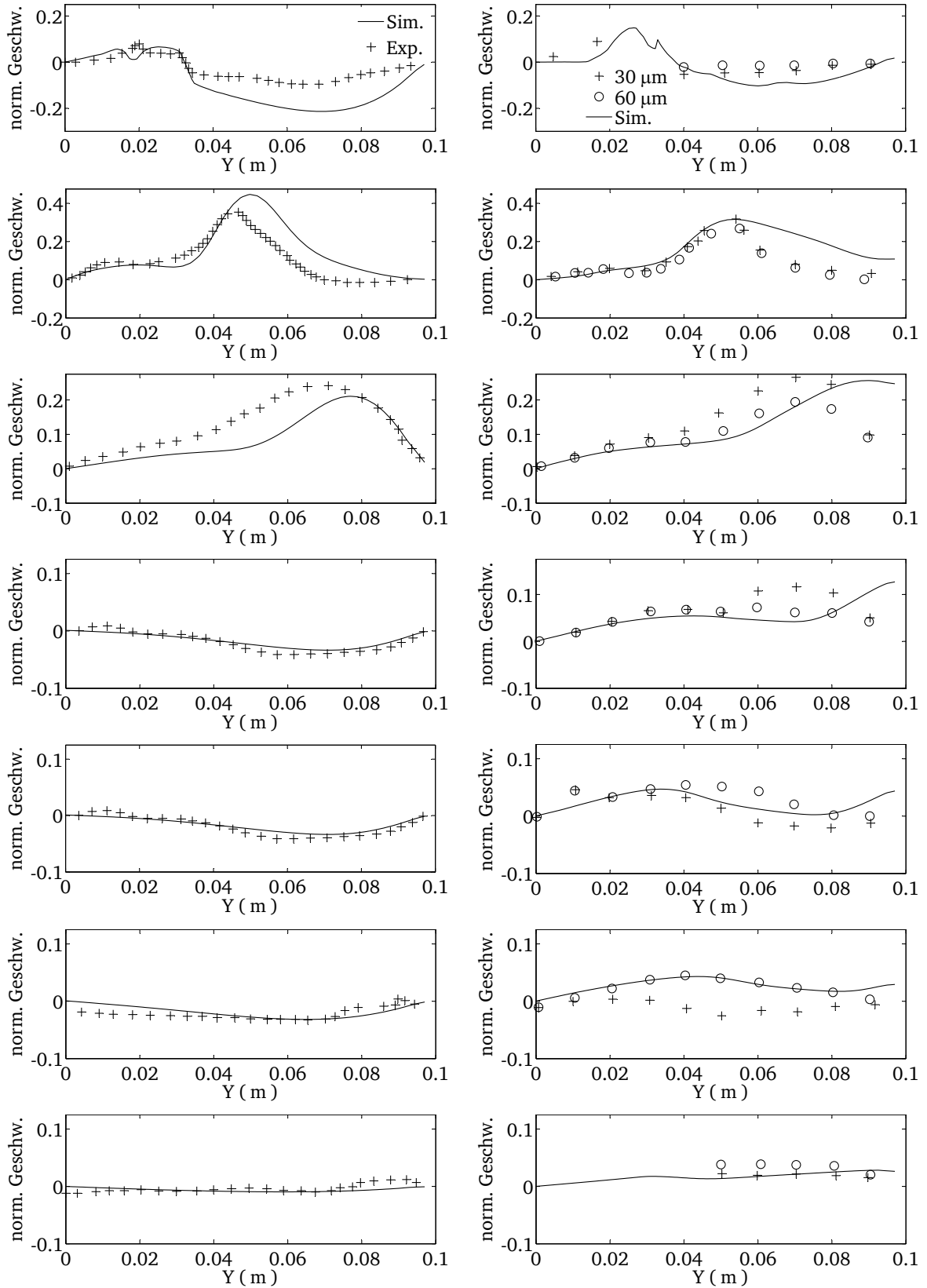


Abbildung 6.19.: Vergleich der mittleren radialen Geschwindigkeiten der kontinuierlichen Phase (links) und der dispersen Phase (rechts). Von oben nach unten Messpositionen : x_1 - x_7

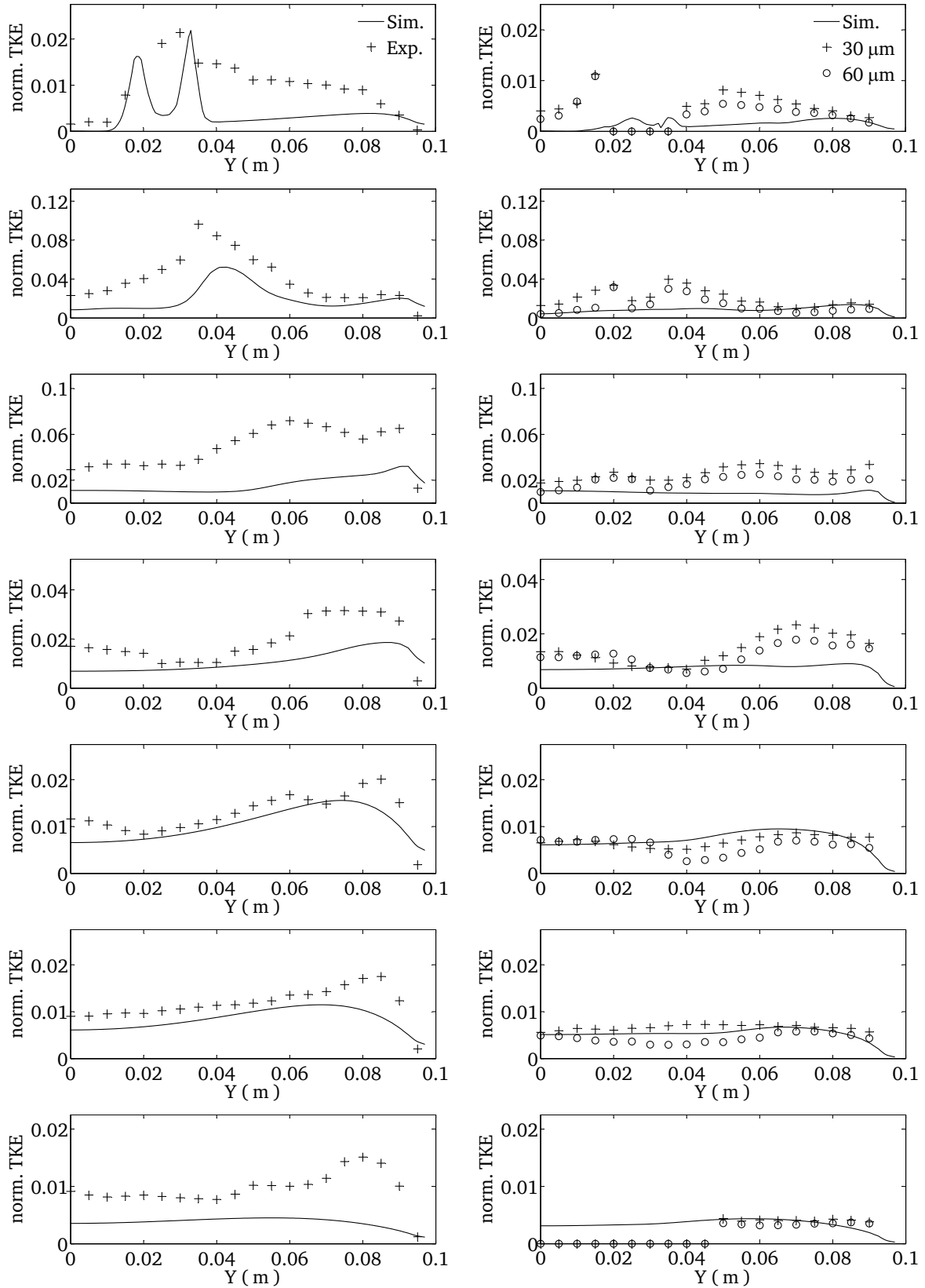


Abbildung 6.20.: Vergleich der turbulenten kinetischen Energie der kontinuierlichen Phase (links) und der dispersen Phase (rechts). Von oben nach unten Messpositionen : x_1 - x_7

6.4 Verdampfende Tropfen

6.4.1 Beschreibung des Experiments und der Simulation

Zur Validierung der gekoppelten Methode (DQMOM mit Multi-Fluid) wird das Experiment von Wong und Chang [90] verwendet. Wong und Chang untersuchten die Verdampfung von Tetralintropfen ($C_{10}H_{12}$). Eine schematische Darstellung des Experiments ist in Abbildung 6.21 zu sehen.

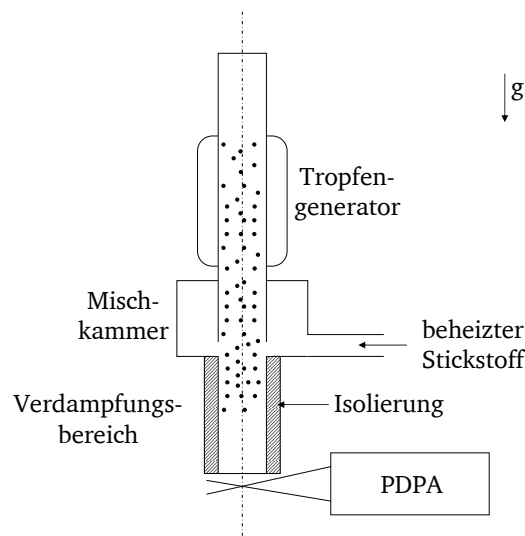


Abbildung 6.21.: Schematische Darstellung des Experiments von verdampfendem Tetralin

Dem Tropfengenerator wird ein Gasgemisch aus Stickstoff und Tetralin zugeführt. Über eine Kühlung werden die Tetralintropfen über Kondensation erzeugt, deren mittlerer Durchmesser am Eintritt in den Verdampfungsbereich $30\text{ }\mu\text{m}$ beträgt. Der Tropfendurchmesser variiert dabei von ca. 7 bis $60\text{ }\mu\text{m}$. In Abbildung 6.22 ist eine repräsentative Anfangsverteilung aus der Arbeit [90] der Tetralintropfen dargestellt. Die Tropfen strömen mit einer maximalen Geschwindigkeit von ca. $u_{d,max} = 0.9\frac{\text{m}}{\text{s}}$ auf der Mittelachse und einer Temperatur von ca. 308 K in den Verdampfungsbereich. Die Trägerphase besteht hauptsächlich aus Stickstoff. Die Kondensation von Tetralingas und die Zuführung von beheiztem Stickstoff führt zu einer Absenkung des Massenanteils an gasförmigem Tetralin auf $Y_{Tetralin,0} = 5 \cdot 10^{-4}$. Die Trägerphase strömt mit einer maximalen Geschwindigkeit von ca. $u_{c,max} = 0.9\frac{\text{m}}{\text{s}}$ auf der Mittelachse und einer Temperatur von ca. 348 K in den Verdampfungsbereich.

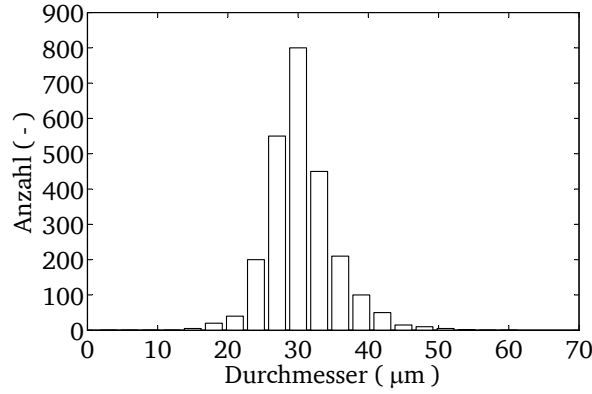


Abbildung 6.22.: Anfangsverteilung von Tetralintropfen [90]

Der Verdampfungsbereich ist ein isolierter Zylinder und soll eine adiabate Umgebung bereitstellen. Um dies zu gewährleisten und um Kondensation an der Wand zu vermeiden ist diese auf 348 K vorgeheizt. Der Innendurchmesser des Verdampfungsbereiches (Zylinder) hat einen Durchmesser von $d_{Rohr} = 0.02 \text{ m}$ und variiert in der Länge von $l_{rohr} = 0.02 \text{ m}$ - 0.65 m . Am Austritt des Verdampfungsbereiches auf der Mittelachse wurden die Messungen bei Umgebungsdruck mit der PDPA-Technik (Phase Doppler Particle Analyzer) durchgeführt.

Für die Simulation wurde nur der Verdampfungsbereich über ein dreidimensionales numerisches Gitter abgebildet. Für die Trägerphase (Stickstoff) wurde eine Dichte von $\rho_{N_2} = 0.9676 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ und eine dynamische Viskosität von $\mu_{N_2} = 2.005 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{sm}}$ gewählt. Somit ergibt sich für die Trägerströmung eine Reynoldszahl von $Re = 868.7$. Tetralin wurde mit einer Dichte von $\rho_{C_{10}H_{12}} = 970 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ abgebildet. Als Eintrittsgeschwindigkeit für Stickstoff und Tetralin wurde jeweils ein quadratisches Geschwindigkeitsprofil angenommen

$$u(r) = \frac{2\dot{V}}{\pi \frac{d_{Rohr}^2}{2}} \left(1 - \frac{r^2}{\frac{d_{Rohr}^2}{2}} \right). \quad (6.5)$$

Zur Bestimmung des Geschwindigkeitsprofils wurde der Volumenstrom \dot{V} so gewählt, dass die maximale Geschwindigkeit auf der Mittelachse $u(r = 0) = 0.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ beträgt. Die Anfangstropfenverteilung (Abbildung 6.22) wurde über eine Normalverteilung mit den Parametern $d_m = 30 \mu\text{m}$ und $\sigma = 2.5$ abgebildet. Aus den Momenten der Normalverteilung wurden die Anfangsbedingungen für die disperse Phase (drei Wichtungen und drei repräsentative Durchmesser) mit dem PD-Algorithmus bestimmt. Zur Abbildung der Sättigung wurde der Massenanteil des verdampften Tetralin bei der Bestimmung der Verdampfungsrate berücksichtigt (siehe Abschnitt 3.3.3).

6.4.2 Ergebnisse

Aus den vorliegenden experimentellen Untersuchungen wurden vier Fälle betrachtet. Dabei wurde in den Experimenten die Anzahl der Tetralintropfen variiert ($N = 50, 1000, 1500$ und 2100). Gemessen wurde der Volumenanteil der Tropfen. Abbildung 6.23 zeigt den Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen für die Fälle mit der Tropfenanzahl $N = 50$ und $N = 1000$. Abbildung 6.24 zeigt die Fälle mit der Tropfenanzahl $N = 1500$ und $N = 2100$.

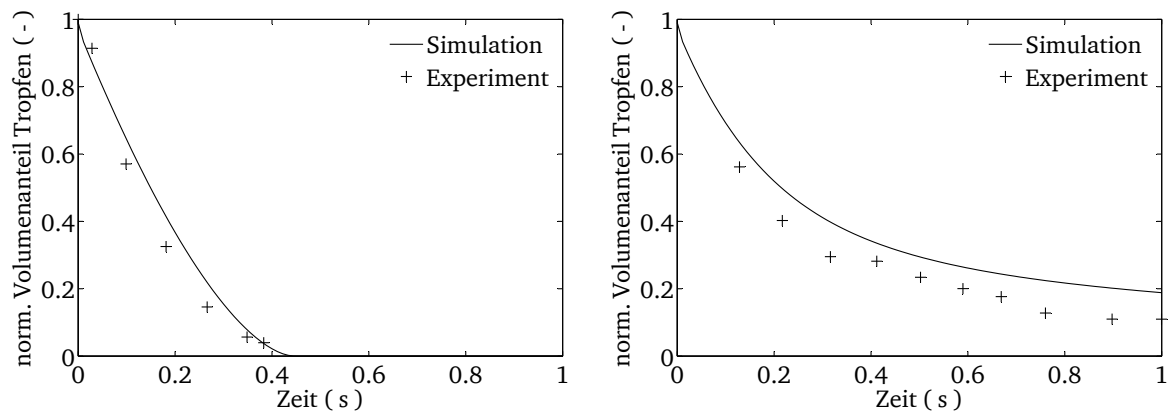


Abbildung 6.23.: Vergleich des Volumenanteils der Tropfen aufgetragen über der Zeit: $N = 50$ (links) und $N = 1000$ (rechts).

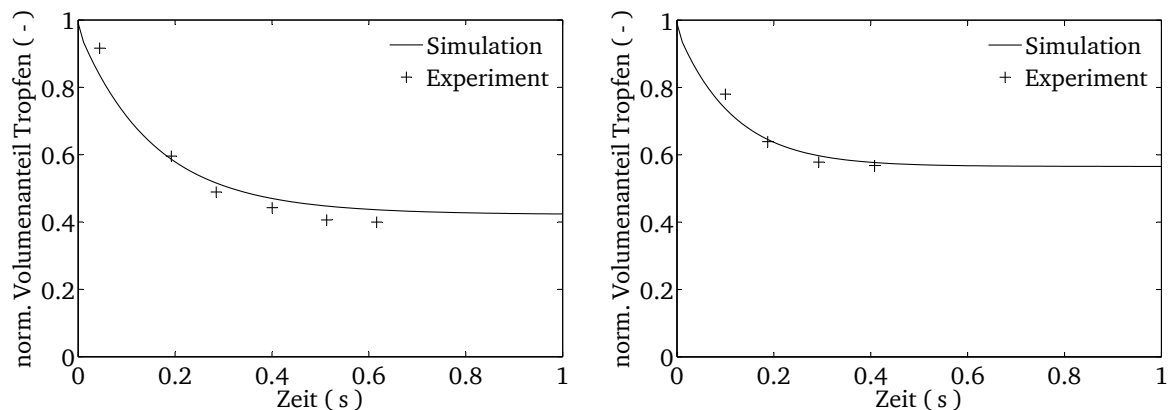


Abbildung 6.24.: Vergleich des Volumenanteils der Tropfen aufgetragen über der Zeit: $N = 1500$ (links) und $N = 2100$ (rechts).

Der Vergleich der Ergebnisse aus der Simulation und den Experimenten zeigt, dass der Verdampfungsprozess gut dargestellt werden kann. Durch die Verdampfung sinkt

der Volumenanteil der Tropfen. Für den Fall mit $N = 50$ Tropfen zeigen die experimentellen Ergebnisse, dass alle Tropfen vollständig verdampfen und der Volumenanteil verschwindet. Der Vergleich mit den Simulationsergebnissen zeigt, dass die vollständige Verdampfung sehr gut wiedergegeben wird (siehe Abbildung 6.23, links). Eine Erhöhung der Tropfenanzahl auf $N = 1000$ hat zur Folge, dass der Verdampfungsprozess langsamer abläuft und die Tropfen nicht mehr innerhalb des betrachteten Gebiets vollständig verdampfen. Die Simulation kann auch diesen Fall sehr gut abbilden (siehe Abbildung 6.23, rechts). Eine weitere Erhöhung der Tropfenanzahl auf $N = 1500$ und $N = 2100$ führt schließlich dazu, dass durch die verdampfte Masse die noch vorhandenen Tropfen nicht mehr verdampfen und sich eine Sättigung einstellt. Dies ist aus dem Verlauf des Volumenanteils der noch nicht verdampften Tropfen zu erkennen. Bei einer Sättigung bleibt der Volumenanteil der Tropfen konstant. Der Vergleich mit den Simulationsergebnissen zeigt, dass die Berücksichtigung des Massenbruchs der verdampften Masse die Sättigung gut abbilden kann (siehe Abbildung 6.24). Generell ist zu beobachten, dass in der Simulation die Verdampfung langsamer abläuft. Ein möglicher Grund ist die Bestimmung der Verdampfungsrate über das verwendete Verdampfungsgesetz. Hier wird angenommen, dass die Tropfentemperatur konstant bleibt.



7 Zusammenfassung und Ausblick

Zielsetzung dieser Arbeit ist einen Beitrag zur Erweiterung der numerischen Entwicklung von Verbrennungsprozessen zu leisten. Dazu wurden in einem ersten Schritt mehrphasige Prozesse, die vor der Verbrennung stattfinden, mit Computersimulationen abgebildet. Bei der Implementierung des Verfahrens, die einen Hauptteil der Arbeit darstellte, wurde die Anwendbarkeit in industriellen Umgebungen berücksichtigt. Mit der Implementierung des gekoppelten Verfahrens (Multi-Fluid-Methode mit DQMOM) in den unstrukturierten CFD-Code (Precise-Unstructured) konnte die Darstellung von komplexen Geometrien und ein akzeptabler Rechenaufwand gewährleistet werden.

Polydisperse Mehrphasenströmungen werden oftmals über Verteilungsfunktionen (Tropfengröße über Häufigkeit) abgebildet, deren Entwicklung in Raum und Zeit in technischen Umgebungen interessiert. Daher müssen diese Informationen (Tropfengröße und Häufigkeit) an jedem Ort zu jedem Zeitpunkt vorliegen, was bei Computersimulationen oftmals zu einem hohen Speicher- und Rechenbedarf führt. Um dem entgegen zu wirken, wurde in dieser Arbeit die Multi-Fluid-Methode mit der DQMOM gekoppelt und die Polydispersität über drei Multi-Fluid-Phasen dargestellt. Dabei liegt dem Verfahren die Idee zugrunde, dass Verteilungsfunktionen über ihre Momente charakterisiert werden können. Die Approximation der Verteilungsfunktionen über sechs Quadratur-Variablen ermöglichte die Rekonstruktion der Momente der Verteilungsfunktion. Mit dem gekoppelten Verfahren konnte die Entwicklung dieser Quadratur-Variablen in Raum und Zeit unter Einfluss der betrachteten Effekte (Gravitation, Widerstandskraft und Verdampfung) bestimmt, die Entwicklung der Momente berechnet und zudem Rückschlüsse auf die Verteilungsfunktion gezogen werden. Die Gravitation und Widerstandskräfte sowie die Rückwirkung der dispersen Phase auf die kontinuierliche Phase fanden Berücksichtigung über die Multi-Fluid-Methode. Die Verdampfung, abgebildet mit dem D^2 -Gesetz im Kontext der DQMOM, erlaubte den Einbezug des Massentransfers sowie die Impulsänderung durch die Verdampfung mit den DQMOM-Quelltermen. Die Erweiterung der Verdampfung mit einer zusätzlichen Transportgleichung konnte den Effekt der Sättigung bei der Verdampfung abbilden.

Die Verifizierung stellte sicher, dass die einzelnen Modelle und Methoden korrekt implementiert wurden. Einfache Testfälle zeigten, dass die Massen- und die Impulsbilanzen der Multi-Fluid-Methode die erwarteten Ergebnisse liefern und der Impulstransfer zwischen den Phasen über die Widerstandskraft richtig dargestellt wird. Weitere Ve-

rifizierungen bestätigten, dass der weiterentwickelte Code für jede Multi-Fluid-Phase und jede Richtung die gleichen Ergebnisse erzielt. Die Vergleiche mit den Ergebnissen aus Euler-Lagrange-Simulationen dienten der Verifizierung der gekoppelten Methode (Multi-Fluid-Methode mit DQMOM), bei denen unterschiedliche Tropfenverteilungen ausgewählt und der Einfluss von Widerstandskraft, Verdampfung und die Kombination beider untersucht wurde. Dabei zeigte der Vergleich der Momente und die Änderung dieser aufgrund des Widerstands, dass eine sehr gute Abbildung der Widerstandskraft erreicht wird. Bei der Verdampfung wurde zunächst sichergestellt, dass das verwendete Verdampfungsmodell korrekt abgebildet wird. Die Untersuchung der Verdampfung mit und ohne Widerstandskräfte zeigte, dass die Verdampfung mit der gekoppelten Methode dargestellt werden kann, und die Vorhersage des Punktes vollständiger Verdampfung möglich ist. Dabei ergab sich, dass das 2. und 3. Moment (Oberfläche und Volumen der Tropfen), welche zur Bestimmung des Sauterdurchmessers verwendet werden, gut abgebildet wurden, obwohl eine korrekte Wiedergabe des 0. Moments (Anzahl der Tropfen) nicht möglich war. Aus den Untersuchungen konnte festgestellt werden, dass mit diesem Verfahren die Abbildung von Normalverteilungen (Tropfendurchmesser über Häufigkeit) besser war als die von logarithmischen Normalverteilungen, deren Abbildung mit steigender Standardabweichung schwieriger wurde. Drei unterschiedliche Testfälle dienten der Validierung der Multi-Fluid-Methode und führten zu den Ergebnissen, dass die experimentell bestimmten mittleren Geschwindigkeiten und Fluktuationen beider Phasen gut wiedergegeben werden können. Das Modell für die Partikelfluktuationen unterschätzte dabei teilweise sehr stark die gemessenen Partikelfluktuationen, deren Ergebnisse über eine stärkere Korrelation der Fluktuationen der kontinuierlichen und dispersen Phase verbessert wurde. Die Turbulenz, modelliert über das k - ε -Modell, zeigte vor allem in der Drallkonfiguration seine Grenzen. Ein Experiment zur Untersuchung der Verdampfung von Tetralintropfen diente der Validierung der gekoppelten Methode. Es lagen experimentelle Ergebnisse von vier unterschiedlichen Konfigurationen vor. Die Simulationsergebnisse der ersten Konfiguration zeigten, dass der Punkt vollständiger Verdampfung über die verwendete Methode und das Verdampfungsmodell korrekt vorhergesagt wurde. Bei den weiteren Konfigurationen war aus den experimentellen Ergebnissen zu sehen, dass bei der Verdampfung eine Sättigung auftreten kann, die über das erweiterte Verdampfungsmodell ebenfalls gut abgebildet wurde. Die Ungenauigkeit in der Vorhersage des 0. Moments beeinflusste die Wiedergabe des Volumenanteils der Tropfen in diesem Fall nur geringfügig.

Diese Arbeit, in der die Darstellbarkeit von Widerstandskraft und Verdampfung von Tropfen untersucht wurde, legt die Möglichkeiten und das Potential zur Simulation technischer Sprays mit Momentenmethoden gekoppelt mit der Multi-Fluid-Methode dar. Von Vorteil ist die Darstellbarkeit der Polydispersität mit nur drei Multi-Fluid-

Phasen. Bestärkt wird dieses Ergebnis durch die Ergebnisse aus den Arbeiten [24, 52, 53], aus denen hervor geht, dass auch Effekte wie Kollision, Zerfall und Koaleszenz, die für eine Abbildung von technischen Sprays notwendig sind, mit dieser Methode abgebildet werden können. Unberücksichtigt bleibt weiter der Effekt der sich kreuzenden Partikel (PTC⁷) in schwach beladenen Mehrphasenströmungen, welcher in [75] über Momentenmethoden abgebildet werden konnte. Eine verbesserte Abbildbarkeit von Verteilungen mit starker Schiefeit, z. B. logarithmische Verteilungen mit großer Standardabweichung kann durch Verwendung von mehr als drei Abszissen erreicht werden. Im Kontext der Verdampfung besteht noch weiterer Forschungsbedarf, um die Vorhersage des 0. Moments zu verbessern und komplexere Verteilungen (z. B. bimodale) abzubilden.

⁷ Particle Trajectory Crossing



A Der PD-Algorithmus

Der PD-Algorithmus benötigt als Eingangsgrößen die Anzahl N der gewünschten Knoten (Abszissen) und die ersten $2N + 1$ Momente $m_0 - m_{2N}$ der betrachteten Verteilungsfunktion. Der erste Schritt ist der Aufbau der sogenannten PD-Tabelle mit den Komponenten $P_{i,j}$.

$$P_{i,1} = \delta_{i1}, \quad i \in (1, \dots, 2N + 1), \quad (\text{A.1})$$

$$P_{i,2} = (-1)^{i-1} m_{i-1}, \quad i \in (1, \dots, 2N + 1), \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} P_{i,j} &= P_{1,j-1} P_{i+1,j-2} - P_{1,j-2} P_{i+1,j-1}, \\ j &\in (3, \dots, 2N + 1) \quad \text{und} \quad i \in (1, \dots, 2N + 2 - j). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Der nächste Schritt ist die Generierung eines Vektors α_i , dessen erste Komponente $\alpha_1 = 0$ ist. Die weiteren Komponenten werden über folgende Beziehung bestimmt

$$\alpha_i = \frac{P_{1,i+1}}{P_{1,i} P_{1,i-1}}, \quad i \in (1, \dots, 2N). \quad (\text{A.4})$$

Aus diesem Vektor wird eine symmetrische tridiagonale Matrix erzeugt

$$a_i = \alpha_{2i} + \alpha_{2i-1}, \quad i \in (1, \dots, N), \quad (\text{A.5})$$

$$b_i = \sqrt{\alpha_{2i} \alpha_{2i+1}}, \quad i \in (1, \dots, N - 1). \quad (\text{A.6})$$

a_i sind die Diagonalelemente der Matrix und b_i die Nebendiagonalelemente. Die Abszissen sind die Eigenwerte der Matrix und die zugehörigen Wichtungen werden über bestimmt

$$w_i = m_0 \omega_{i,1}^2, \quad (\text{A.7})$$

wobei m_0 das 0. Moment und $\omega_{i,1}$ die erste Komponente des i -ten Eigenvektor ist.



Literaturverzeichnis

- [1] *Statistik Der Energiewirtschaft*. VDI-Verl., Essen Essen Düsseldorf, 2006.
- [2] ABRAMZON, B. und W. SIRIGNANO: *Droplet Vaporization Model for Spray Combustion Calculations*. INTERNATIONAL JOURNAL OF HEAT AND MASS TRANSFER, 32(9):1605–1618, 1989.
- [3] ANH, H.-C.: *Modellierung der Partikelagglomeration im Rahmen des Euler/Lagrange-Verfahrens und Anwendung zur Berechnung der Staubabscheidung im Zyklon*. Dissertation, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, 2004.
- [4] APTE, S., K. MAHESH und T. LUNDGREN: *A Eulerian-Lagrangian Model to Simulate Two-Phase/Particulate Flows*. Technischer Bericht, Center for Turbulence Research, 2003.
- [5] ATTAR, P. und P. VEDULA: *Direct Quadrature Method of Moments Solution of the Fokker-Planck Equation*. JOURNAL OF SOUND AND VIBRATION, 317(1-2):265–272, 2008.
- [6] BALACHANDAR, S. und J. EATON: *Turbulent Dispersed Multiphase Flow*. Annual Review of Fluid Mechanics, 42:111–133, 2010.
- [7] BEHZADI, A., R. ISSA und H. RUSCHE: *Modelling of Dispersed Bubble and Droplet Flow at High Phase Fractions*. CHEMICAL ENGINEERING SCIENCE, 59(4):759–770, 2004.
- [8] BOVE, S.: *Computational Fluid Dynamics of Gas-Liquid Flows Including Bubble Population Balances*. Dissertation, Aalborg University, 2005.
- [9] BÖTTNER, C.-W.: *Über den Einfluss der elektrostatischen Feldkraft auf turbulente Zweiphasenströmungen, numerische Modellierung mit der Euler-Lagrange Methode*. Dissertation, Martin-Luther-Universität Halle Wittenver, 2002.
- [10] CHEN, C. und P. WOOD: *A Turbulence Closure-Model for Dilute Gas-Particle Flows*. CANADIAN JOURNAL OF CHEMICAL ENGINEERING, 63(3):349–360, 1985.
- [11] CHEN, C. und P. WOOD: *Turbulence Closure Modelling of the Dilute Gas-Particle Axisymmetrical Jet*. AIChE JOURNAL, 32(1):163–166, 1986.

-
- [12] CHRIGUI, M.: *Eulerian-Lagrangian Approach for Modeling and Simulations of Turbulent Reactive Multi-Phase Flows under Gas Turbine Combustor Conditions*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2005.
- [13] CROWE, C., M. SOMMERFELD und Y. TSUJI: *Multiphase Flows with Droplets and Particles*. CRC Press, 1998.
- [14] DE CHAISEMARTIN, S., L. FRERET, D. KAH, F. LAURENT, R. FOX, J. REVEILLON und M. MASSOT: *Eulerian Models for Turbulent Spray Combustion with Polydispersity and Droplet Crossing*. COMPTES RENDUS MECANIQUE, 337(6-7):438–448, 2009.
- [15] DECKER, S.: *Zur Berechnung von gerührten Suspensionen mit dem Euler-Lagrange-Verfahren*. Dissertation, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, 2005.
- [16] DESJARDINS, O., R. FOX und P. VILLEDIEU: *A Quadrature-Based Moment Method for Dilute Fluid-Particle Flows*. JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS, 227(4):2514–2539, 2008.
- [17] DOPAZO, C.: *Conditioned Averages for Intermittent Turbulent Flows*. JOURNAL OF FLUID MECHANICS, 81(JUL13):433–438, 1977.
- [18] FAN, R. und R. FOX: *Segregation in Polydisperse Fluidized Beds: Validation of a Multi-Fluid Model*. CHEMICAL ENGINEERING SCIENCE, 63(1):272–285, 2008.
- [19] FAN, R., D. MARCHISIO und R. FOX: *Application of the Direct Quadrature Method of Moments to Polydisperse Gas-Solid Fluidized Beds*. POWDER TECHNOLOGY, 139(1):7–20, 2004.
- [20] FERZIGER, J.H. und M. PERIC: *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, Berlin u.a., 3., rev. Auflage, 2002.
- [21] FESSLER, J. und J. EATON: *Turbulence Modification by Particles in a Backward-Facing Step Flow*. JOURNAL OF FLUID MECHANICS, 394:97–117, 1999.
- [22] FOX, R., F. LAURENT und M. MASSOT: *Numerical Simulation of Spray Coalescence in an Eulerian Framework: Direct Quadrature Method of Moments and Multi-Fluid Method*. JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS, 227(6):3058–3088, 2008.
- [23] FOX, R.O.: *Computational Models for Turbulent Reacting Flows*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [24] FRIEDRICH, M. und B. WEIGAND: *Eulerian Multi-Fluid Simulation of Polydisperse Dense Liquid Sprays by the Direct Quadrature Method of Moments*. In: ICLASS, 2006.

-
- [25] GODSAVE, G.: *Studies of the Combustion of Drops in a Fuel Spray: The Burning of Single Drops of Fuel*. Fourth Symposium (International) on Combustion, Seiten 818–830, 1953.
- [26] GOKULAKRISHNAN, P., M. RAMOTOWSKI, G. GAINES, C. FULLER, R. JOKLIK, L. ESKIN, M. KLASSEN und R. ROBY: *A Novel Low NO_x Lean, Premixed, and Prevaporized Combustion System for Liquid Fuels*. JOURNAL OF ENGINEERING FOR GAS TURBINES AND POWER-TRANSACTIONS OF THE ASME, 130(5):–, 2008.
- [27] GORDON, R.: *Error Bounds in Equilibrium Statistical Mechanics*. JOURNAL OF MATHEMATICAL PHYSICS, 9(5):655–, 1968.
- [28] GOSMAN, A., C. LEKAKOU, S. POLITIS, R. ISSA und M. LOONEY: *Multidimensional Modeling of Turbulent Two-Phase Flows in Stirred Vessels*. AICHE JOURNAL, 38(12):1946–1956, 1992.
- [29] GROH, B.: *Grobstruktursimulation turbulenter Mehrphasenströmungen mit und ohne Phasenübergang*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2004.
- [30] GROLL, R.: *Numerische Modellierung der Verdunstung turbulenter Zwei-Phasen-Strömungen mittels eines Euler/Euler-Verfahrens*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2002.
- [31] HAHN, F.: *Zur Vorhersage technischer Verbrennungssysteme im Hinblick auf flüssige Brennstoffe*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2009.
- [32] HAM, F., S. APTE, G. IACCARINO, X. WU, G. HERMANN, K. CONSTANTINESCU, K. MAHESH und P. MOIN: *Unstructured Les of Reacting Multiphase Flows in Realistic Gas Turbine Combustors*. Technischer Bericht, Center of turbulence research, 2003.
- [33] HILL, D.P.: *The Computer Simulation of Dispersed Two-Phase Flows*. Dissertation, University of London, 1998.
- [34] HUBBARD, G., V. DENNY und A. MILLS: *Droplet Evaporation - Effects of Transients and Variable Properties*. INTERNATIONAL JOURNAL OF HEAT AND MASS TRANSFER, 18(9):1003–1008, 1975.
- [35] HULBURT, H. und S. KATZ: *Some Problems in Particle Technology - a Statistical Mechanical Formulation*. CHEMICAL ENGINEERING SCIENCE, 19(8):555–574, 1964.
- [36] IEA: *How the Energy Sector Can Deliver on a Climate Agreement in Copenhagen*. Technischer Bericht, 2009.
- [37] ISHII, M. und T. HIBIKI: *Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow*. Springer Science+Business Media, Boston, 2006.

-
- [38] JONES, W. und B. LAUNDER: *Prediction of Laminarization with a 2-Equation Model of Turbulence*. INTERNATIONAL JOURNAL OF HEAT AND MASS TRANSFER, 15(2):301–, 1972.
- [39] KATAOKA, I., D. BESNARD und A. SERIZAWA: *Basic Equation of Turbulence and Modeling of Interfacial Transfer Terms in Gas-Liquid 2-Phase Flow*. CHEMICAL ENGINEERING COMMUNICATIONS, 118:221–236, 1992.
- [40] KAUFMANN, A.: *Towards Eulerian-Eulerian Large Eddy Simulation of Reactive Two-Phase Flows*. Dissertation, Institute National Polytechnique de Toulouse, 2004.
- [41] KLEEFSMAN, K.M.T. und A. VELDMAN: *An Improved Volume-of-Fluid Method for Wave Impact*. In: *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, 2004.
- [42] KLEIN, M.: *Direkte numerische Simulation des primären Strahlzerfalls in Einstoffzerstäuberdüsen*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2002.
- [43] KOWALSKI, J.: *Two-Phase Modelling of Derbis Flows*. Dissertation, Universität Augsburg, 2008.
- [44] KRÜS, H.: *Dolfyn Devolpers Guide*, 2006.
- [45] KRÜS, H.: *Dolfyn Input Guide*, 2006.
- [46] KULICK, J., J. FESSLER und J. EATON: *Particle Response and Turbulence Modification in Fully-Developed Channel Flow*. JOURNAL OF FLUID MECHANICS, 277:109–134, 1994.
- [47] LAURENT, F., M. MASSOT und P. VILLEDIEU: *Eulerian Multi-Fluid Modeling for the Numerical Simulation of Coalescence in Polydisperse Dense Liquid Sprays*. JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS, 194(2):505–543, 2004.
- [48] LAZIK, W., T. DOERR und S. BAKE: *Low NO_x Combustor Development for the Engine3e Core Engine Demonstrator*. In: *ISABE*, 2007.
- [49] LAZIK, W., T. DOERR, S. BAKE, V.D.R. BANK und L. RACKWITZ: *Development of Lean-Burn Low-NO_x Combustion Technology at Rolls-Royce Deutschland*. In: *ASME Turbo Expo*, 2008.
- [50] LEFEBVRE, A.H.: *Atomization and Sprays*. Hemisphere Publ., New York u.a., 1989.
- [51] MADSEN, J.: *Computational and Experimental Study of Sprays from the Breakup of Water Sheets*. Dissertation, Aalborg University Esbjerg, 2006.

-
- [52] MADSEN, J., B. HJERTAGER, T. SOLBERG, P. NORSKOV und J. RUSAS: *Application of the Direct Quadrature Method of Moments to Y-Jet Water Sprays*. ICLASS, 2006.
- [53] MADSEN, J., T. SOLBERG und B. HJERTAGER: *Numerical Simulation of Sprays by the Direct Quadrature Method of Moments*. In: *ILASS*, 2005.
- [54] MARCHISIO, D. und R. FOX: *Solution of Population Balance Equations Using the Direct Quadrature Method of Moments*. *JOURNAL OF AEROSOL SCIENCE*, 36(1):43–73, 2005.
- [55] MARCHISIO, D., J. PIKTURNA, R. FOX, R. VIGIL und A. BARRESI: *Quadrature Method of Moments for Population-Balance Equations*. *AIChE JOURNAL*, 49(5):1266–1276, 2003.
- [56] MARCHISIO, D., R. VIGIL und R. FOX: *Implementation of the Quadrature Method of Moments in CFD Codes for Aggregation-Breakage Problems*. *CHEMICAL ENGINEERING SCIENCE*, 58(15):3337–3351, 2003.
- [57] MARCHISIO, D., R. VIGIL und R. FOX: *Quadrature Method of Moments for Aggregation-Breakage Processes*. *JOURNAL OF COLLOID AND INTERFACE SCIENCE*, 258(2):322–334, 2003.
- [58] MATYSIAK, A.: *Euler-Lagrange Verfahren zur Simulation tropfenbeladener Strömungen in einem Verdichter*. Dissertation, Helmut-Schmidt-Universität, 2007.
- [59] MCGRAW, R.: *Description of Aerosol Dynamics by the Quadrature Method of Moments*. *AEROSOL SCIENCE AND TECHNOLOGY*, 27(2):255–265, 1997.
- [60] MCGRAW, R. und J. SAUNDERS: *A Condensation Feedback Mechanism for Oscillatory Nucleation and Growth*. *AEROSOL SCIENCE AND TECHNOLOGY*, 3(4):367–380, 1984.
- [61] MENARD, T., S. TANGUY und A. BERLEMONT: *Coupling Level Set/VoF/Ghost Fluid Methods: Validation and Application to 3D Simulation of the Primary Break-up of a Liquid Jet*. *INTERNATIONAL JOURNAL OF MULTIPHASE FLOW*, 33(5):510–524, 2007.
- [62] MERKER, G., C. SCHWARZ, G. STIESCH und F. OTTO: *Simulating Combustion*. Springer, Berlin u.a., 2006.
- [63] MOHANARANGAM, K. und J. TU: *Two-Fluid Model for Particle-Turbulence Interaction in a Backward-Facing Step*. *AIChE JOURNAL*, 53(9):2254–2264, 2007.
- [64] MOHANARANGAM, K., J. TU und L. CHEN: *Numerical Simulation and Validation of Turbulent Gas-Particle Flow in a Backward-Facing Step*. In: *Proceedings of the Fifth International Conference on CFD in the Process Industries*, 2006.

-
- [65] NERNST, W.: *Theorie der Reaktionsgeschwindigkeit in heterogenen Systemen*. Zeitschrift für physikalische Chemie, 47:52–55, 1904.
- [66] OCHS, M.: *Verdunstung monodisperser, frei beweglicher Brennstoff-Tropfen in einer turbulenten Heissluftströmung*. Dissertation, ETH Zürich, 1999.
- [67] PESKIN, R.: *The Diffusivity of Small Suspend Particles in Turbulent Fluids*. In: *AIChE National Meeting*, 1962.
- [68] POLITIS, S.: *Prediction of Two-Phase Solid-Liquid Turbulent Flow in Stirred Vessels*. Doktorarbeit, University of London, 1989.
- [69] POPE, S.: *Explanation of Turbulent Round-Jet-Plane-Jet Anomaly*. *AIAA JOURNAL*, 16(3):279–281, 1978.
- [70] RIBER, E., V. MOUREAU, M. GARCIA, T. POINSOT und O. SIMONIN: *Evaluation of Numerical Strategies for Large Eddy Simulation of Particulate Two-Phase Recirculating Flows*. *JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS*, 228(2):539–564, 2009.
- [71] RUECKERT, U.: *Simulation von Festbettreaktoren zur technischen Verbrennung mit der Euler/Euler-Methode*. Dissertation, Universität Stuttgart, 2005.
- [72] RUSCHE, H.: *Computational Fluid Dynamics of Dispersed Two-Phase Flows at High Phase Fractions*. Dissertation, University of London, 2002.
- [73] SCHÄFER, M.: *Computational Engineering: Introduction to Numerical Methods*. Springer, Berlin u.a., 2006.
- [74] SCHILLER, L. und A. NAUMANN: *Über die grundlegenden Berechnungen bei der Schwerkraftaufbereitung*. Seite 77:318, 1933.
- [75] SCHNEIDER, L.: *A Concise Moment Method for Unsteady Sprays*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2009.
- [76] SCHNEIDER, L.: *Persönliche Kommunikation*, 2009.
- [77] SCHNEIDER, L., N. LE LOSTEC, P. VILLEDIEU und A. SADIKI: *A Moment Method for Polydisperse Sprays*. *COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE*, 347(11-12):691–696, 2009.
- [78] SCHNEIDER, L., A. SADIKI und J. JANICKA: *A Study of the Eulerian Multi-Fluid Method for an Accelerating and Evaporating Spray*. In: *ILASS*, 2008.
- [79] SIRIGNANO, W.A.: *Fluid Dynamics and Transport of Droplets and Sprays*. Cambridge University Press, Cambridge u.a., Repr. Auflage, 2005.

-
- [80] SOLOMON, S., D. QIN, M. MANNING, Z. CHEN, M. MARQUIS, K. AVERYT, M. TIGNOR und H. MILLER: *Ipcc, 2007: Climate Change 2007: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fourth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change*. Technischer Bericht, Cambridge University Press, 2007.
- [81] SOMMERFELD, M. und H. QIU: *Detailed Measurements in a Swirling Particulate 2-Phase Flow by a Phase-Doppler Anemometer*. INTERNATIONAL JOURNAL OF HEAT AND FLUID FLOW, 12(1):20–28, 1991.
- [82] SPALDING, D.: *The Combustion of Liquid Fuels*. Fourth Symposium (International) on Combustion, Seiten 847–864, 1953.
- [83] SPURK, J.H. und N. AKSEL: *Strömungslehre Einführung in die Theorie der Strömungen*. Springer, Berlin u.a., 7. Auflage, 2007.
- [84] TRYGGVASON, G., B. BUNNER, A. ESMAEELI, D. JURIC, N. AL-RAWAHI, W. TAUBER, J. HAN, S. NAS und Y. JAN: *A Front-Tracking Method for the Computations of Multiphase Flow*. JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS, 169(2):708–759, 2001.
- [85] WANG, L. und D. STOCK: *Dispersion of Heavy-Particles by Turbulent Motion*. JOURNAL OF THE ATMOSPHERIC SCIENCES, 50(13):1897–1913, 1993.
- [86] WELLER, H.: *A Code Independent Notation for Finite Volume Algorithms*. Technischer Bericht, 2002.
- [87] WILLIAMS, F.: *Spray Combustion and Atomization*. PHYSICS OF FLUIDS, 1(6):541–545, 1958.
- [88] WILLIAMS, F.A.: *Combustion Theory: The Fundamental Theory of Chemically Reacting Flow Systems*. Perseus Books Group, New York, 2., [Nachdr.]. Auflage, 1999.
- [89] WILMS, J.: *Evaporation of Multicomponent Droplets*. Dissertation, Universität Stuttgart, 2005.
- [90] WONG, S. und J. CHANG: *Evaporation of Nondilute and Dilute Monodisperse Droplet Clouds*. INTERNATIONAL JOURNAL OF HEAT AND MASS TRANSFER, 35(10):2403–2411, 1992.
- [91] ZUCCA, A., D. MARCHISIO, A. BARRESI und R. FOX: *Implementation of the Population Balance Equation in CFD Codes for Modelling Soot Formation in Turbulent Flames*. CHEMICAL ENGINEERING SCIENCE, 61(1):87–95, 2006.



Lebenslauf

Persönliche Daten

Name	Du-Fhan Choi
Geburtsdatum	15. Januar 1980
Geburtsort	Frankfurt am Main

Schulausbildung

08.1986 bis 07.1990	Riedhofschule in Frankfurt am Main
08.1990 bis 06.1999	Carl-Schurz-Schule in Frankfurt am Main

Studium

10.1999 bis 07.2006	Technische Universität Darmstadt Fachrichtung Allgemeiner Maschinenbau
02.2000 bis 08.2000	Seoul National University Fachrichtung Luft- und Raumfahrttechnik

Beruflicher Werdegang

seit 11.2006	Wissenschaftlicher Mitarbeiter Technische Universität Darmstadt Fachgebiet für Energie- und Kraftwerkstechnik
--------------	---